MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

62. BAND, 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 14. MAI 1955)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1955

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut
H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

62. Band **Inhalt** 3. Heft

Seite

Fuhrmann, A., Klassen ähnlicher Matrizen als verallgemeinerte Doppelverhältnisse 211

Leptin, H., Linear kompakte Moduln und Ringe 241

Karzel, H., Ordnungsfunktionen in nichtdesarguesschen projektiven Geometrien . 268

Müller, M., Über Interpolation mittels ganzer rationaler Funktionen 292

Markus, L., Continuous matrices and the stability of differential systems. 310

Djerasimović, B., Beitrag zur Theorie der regelmäßigen Kettenbrüche 320

Vidav, I., Über eine Vermutung von Kaplansky. 330

FUHRMANN, A.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 211—240 (1955)

Klassen ähnlicher Matrizen als verallgemeinerte Doppelverhältnisse.

Von
ARVED FUHRMANN.

1. Einleitung.

GRASSMANN verallgemeinerte das gewöhnliche Doppelverhältnis von vier Punkten auf einer Geraden mit Hilfe der PLÜCKERschen Linienkoordinaten zu dem Doppelverhältnis von vier Geraden im dreidimensionalen Raum[1]). Zwei durch Permutation dieser vier Geraden gewonnene GRASSMANNsche Doppelverhältnisse bestimmen, von Sonderfällen abgesehen, deren Lagebeziehung eindeutig; die in entsprechender Weise aus den Determinantentensoren vier linearer Mannigfaltigkeiten höherer Dimension gebildete Invariante kann deren Lagebeziehung jedoch nie eindeutig bestimmen; denn sie ist die Determinante einer bis auf Ähnlichkeit eindeutig bestimmten Matrix $\mathfrak{A}$, die man durch geeignete Normierung der Koordinatenmatrizen jener vier Mannigfaltigkeiten gewinnen kann. Daher ist die Klasse der zu dieser Matrix $\mathfrak{A}$ ähnlichen Matrizen jener tensoriellen Invariante als Verallgemeinerung des Doppelverhältnisses vorzuziehen.

Um die besagte Matrizenklasse aus den Koordinaten der vier Mannigfaltigkeiten direkt durch einen Invariantenprozeß statt durch eine Normierung zu gewinnen, wird im ersten Teil des vorliegenden Aufsatzes der dazu erforderliche Kalkül in enger Anlehnung an [*3*] entwickelt.

Im zweiten Teil werden die Klassen ähnlicher Matrizen als verallgemeinerte Doppelverhältnisse systematisch eingeführt; sie besitzen in mannigfacher Hinsicht ganz analoge Eigenschaften wie die gewöhnlichen Doppelverhältnisse. Es ist bemerkenswert, daß die Beweise dafür fast durchweg schon bei Benutzung eines beliebigen Koeffizientenkörpers[2]) durchführbar sind; jedoch entstehen dabei einige Schwierigkeiten, weil die Ähnlichkeitstransformationen über nichtkommutativen Körpern bisher noch wenig untersucht worden zu sein scheinen.

Um diese Schwierigkeiten zu bewältigen, wird im dritten Teil zunächst die Existenz der JORDANschen Normalform, wenn auch mit einer gewissen Einschränkung, bei Zugrundelegung eines beliebigen Körpers bewiesen, und zwar trotz der geringen Voraussetzungen sehr elementar. Mit Hilfe dieser „quasi-JORDANschen Normalform" kann man schließlich eine gewisse spezielle

[1]) Vgl. [*6*], S. 383.

[2]) Ein Körper ist hier stets beliebig, d.h. kommutativ oder nichtkommutativ, soweit nichts anderes gesagt wird.

Ähnlichkeitstransformation auf die gewöhnliche Ähnlichkeitstransformation zurückführen; es handelt sich dabei um ein Isomorphieproblem bei ABELschen Gruppen mit Operatoren.

I. Lineare Mannigfaltigkeiten.

(I 1) *Duale Vektorräume.* $\boldsymbol{K}$ sei ein Körper, n eine natürliche Zahl, $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{K}_d^n$ der n-dimensionale Rechtsvektorraum über $\boldsymbol{K}$, und $\boldsymbol{E}^*=\boldsymbol{K}_s^n$ der n-dimensionale Linksvektorraum über $\boldsymbol{K}$. Werden die Elemente $\mathfrak{x}\in\boldsymbol{E}$ explizit als n-gliedrige Spaltenvektoren, die Elemente $\mathfrak{x}^*\in\boldsymbol{E}^*$ als n-gliedrige Zeilenvektoren angeschrieben, so kann das Skalarprodukt $\mathfrak{x}^*\cdot\mathfrak{x}$ einfach als Matrizenprodukt $\boldsymbol{x}_1^*\cdot\boldsymbol{x}_1+\cdots+\boldsymbol{x}_n^*\cdot\boldsymbol{x}_n$ eingeführt werden. Man verifiziert dann ohne Mühe:

$$\text{(I 1a)}\quad\begin{cases}\mathfrak{x}^*\cdot(\mathfrak{x}_1\cdot\boldsymbol{s}_1+\mathfrak{x}_2\cdot\boldsymbol{s}_2)=(\mathfrak{x}^*\cdot\mathfrak{x}_1)\cdot\boldsymbol{s}_1+(\mathfrak{x}^*\cdot\mathfrak{x}_2)\cdot\boldsymbol{s}_2\\ \qquad\qquad(\mathfrak{x}^*\in\boldsymbol{E}^*;\ \mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_2\in\boldsymbol{E};\ \boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2\in\boldsymbol{K})\\ (\boldsymbol{t}_1\cdot\mathfrak{x}_1^*+\boldsymbol{t}_2\cdot\mathfrak{x}_2^*)\cdot\mathfrak{x}=\boldsymbol{t}_1\cdot(\mathfrak{x}_1^*\cdot\mathfrak{x})+\boldsymbol{t}_2\cdot(\mathfrak{x}_2^*\cdot\mathfrak{x})\\ \qquad\qquad(\mathfrak{x}\in\boldsymbol{E};\ \mathfrak{x}_1^*,\mathfrak{x}_2^*\in\boldsymbol{E}^*;\ \boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2\in\boldsymbol{K}).\end{cases}$$

Jeder Vektor $\mathfrak{x}^*\in\boldsymbol{E}^*$ bildet also $\boldsymbol{E}$ homomorph auf $\boldsymbol{K}$ ab und stellt somit eine Linearform über $\boldsymbol{E}$ dar, jeder Vektor $\mathfrak{x}\in\boldsymbol{E}$ ebenso eine Linearform über $\boldsymbol{E}^*$. Demnach ist $\boldsymbol{E}^*$ der „Linearformenraum" oder das „Dual" von $\boldsymbol{E}$, und umgekehrt.

Die Vektoren $\mathfrak{x}\in\boldsymbol{E}$ und $\mathfrak{x}^*\in\boldsymbol{E}^*$ sind zueinander „konträr", wenn ihr Skalarprodukt verschwindet[3]). Ist $\boldsymbol{X}$ eine Vektorenmenge aus $\boldsymbol{E}$, so bilden alle Vektoren aus $\boldsymbol{E}^*$, die zu jedem Vektor aus $\boldsymbol{X}$ konträr sind, die zu $\boldsymbol{X}$ „linkskonträre" Vektorenmenge ${}^\circ\boldsymbol{X}\subseteq\boldsymbol{E}^*$; analog wird einer Vektorenmenge $\boldsymbol{X}^*\subseteq\boldsymbol{E}^*$ die zu ihr „rechtskonträre" Vektorenmenge $\boldsymbol{X}^{*\circ}\subseteq\boldsymbol{E}$ zugeordnet.

Die Unterräume von $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{E}^*$ sowie das Enthaltensein, die Gleichheit, Schnitt, Verbindung, relative Komplementarität und Dimension der Unterräume werden in der üblichen Weise definiert. Offenbar sind ${}^\circ\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{X}^{*\circ}$ stets Unterräume. Bezeichnet $\boldsymbol{M}$ immer einen Unterraum, so gilt[4]):

(I 1b) *Aus* $\boldsymbol{M}_1\subseteq\boldsymbol{M}_2\subseteq\boldsymbol{E}$ *folgt umkehrbar:* ${}^\circ\boldsymbol{M}_2\subseteq{}^\circ\boldsymbol{M}_1\subseteq\boldsymbol{E}^*$,

(I 1c) $({}^\circ\boldsymbol{M})^\circ=\boldsymbol{M}$ *bzw.* ${}^\circ(\boldsymbol{M}^{*\circ})=\boldsymbol{M}^*$

(I 1d) $\boldsymbol{M}_1\cap\boldsymbol{M}_2=({}^\circ\boldsymbol{M}_1\cup{}^\circ\boldsymbol{M}_2)^\circ$ *bzw.* $\boldsymbol{M}_1^*\cap\boldsymbol{M}_2^*={}^\circ(\boldsymbol{M}_1^{*\circ}\cup\boldsymbol{M}_2^{*\circ})$,

(I 1e) $dim(\boldsymbol{M}_1\oplus\boldsymbol{M}_2)=dim\,\boldsymbol{M}_1+dim\,\boldsymbol{M}_2$ *bzw.* $dim(\boldsymbol{M}_1^*\oplus\boldsymbol{M}_2^*)=dim\,\boldsymbol{M}_1^*+dim\,\boldsymbol{M}_2^*$.

Die Unterräume von $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{E}^*$ bilden je einen modularen, relativkomplementären Verband[5]).

Schließlich ist noch zu betonen, daß bei Vektoren $\mathfrak{x}\in\boldsymbol{E}$ unter „Linearkombination", „linearer (Un-)Abhängigkeit" und „Rang" natürlich immer

[3]) Weil die sonst übliche Bezeichnung „orthogonal" in (I 4) zu Mißverständnissen führen könnte, wurde hier der Ausdruck „konträr" gewählt.

[4]) Im einzelnen ausgeführt bei [3].

[5]) Vgl. [2], S. 18, S. 65 und S. 105.

nur die rechtsseitige Linearkombination usw. verstanden wird, bei Vektoren $\mathfrak{x}^* \in \boldsymbol{E}^*$ immer nur die linksseitige Linearkombination usw.

(I 2) *Einseitig äquivalente Matrizen.* Jede Matrix, von der hier die Rede ist, besteht aus Elementen von $\boldsymbol{K}$[6]). Eine n-zeilige Matrix $\mathfrak{M}$ „erzeugt rechtsseitig" den Unterraum $\boldsymbol{M} \leqq \boldsymbol{E}$, der aus allen rechtsseitigen Linearkombinationen ihrer Spalten besteht. Analog wird die „linksseitige Erzeugung" eines Unterraumes $\boldsymbol{M}^* \leqq \boldsymbol{E}^*$ durch eine n-spaltige Matrix $\mathfrak{M}^*$ erklärt, in Zeichen:

$$\text{(I 2a)} \qquad \mathfrak{M} \xrightarrow{d} \boldsymbol{M} \leqq \boldsymbol{E} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{M}^* \xrightarrow{s} \boldsymbol{M}^* \leqq \boldsymbol{E}^*.$$

Die Matrix $\mathfrak{M}$ (bzw. $\mathfrak{M}^*$) heißt „minimal", wenn ihre Spalten (bzw. Zeilen) linear unabhängig sind. — Offenbar gilt:

Satz 1. *Notwendig und hinreichend für die Beziehung*

$$\boldsymbol{M}_1 \leqq \boldsymbol{M}_2 \leqq \boldsymbol{E} \quad \textit{bzw.} \quad \boldsymbol{M}_1^* \leqq \boldsymbol{M}_2^* \leqq \boldsymbol{E}^*$$

ist die Existenz der folgenden Gleichung zwischen den erzeugenden Matrizen $\mathfrak{M}_1$ *und* $\mathfrak{M}_2$ *(bzw.* $\mathfrak{M}_1^*$ *und* $\mathfrak{M}_2^*$*) dieser Unterräume:*

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{S} \quad \textit{bzw.} \quad \mathfrak{M}_1^* = \mathfrak{T} \cdot \mathfrak{M}_2^*.$$

Hieraus folgt sofort:

Satz 2. *Notwendig und hinreichend für die Gleichheit der von* $\mathfrak{M}_1$ *und* $\mathfrak{M}_2$ *rechtsseitig (bzw.* $\mathfrak{M}_1^*$ *und* $\mathfrak{M}_2^*$ *linksseitig) erzeugten Unterräume ist das Bestehen der Gleichungen:*

$$\text{(I 2b)} \quad \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{S}_2 \textit{ und } \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{S}_1 \textit{ bzw. } \mathfrak{M}_1^* = \mathfrak{T}_2 \cdot \mathfrak{M}_2^* \textit{ und } \mathfrak{M}_2^* = \mathfrak{T}_1 \cdot \mathfrak{M}_1^*.$$

Zwei Matrizen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ (bzw. $\mathfrak{M}_1^*$ und $\mathfrak{M}_2^*$), die in dieser Beziehung zueinander stehen, werden „rechtsäquivalent" (bzw. „linksäquivalent") genannt, in Zeichen:

$$\text{(I 2c)} \qquad \mathfrak{M}_1 \overset{d}{\sim} \mathfrak{M}_2 \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{M}_1^* \overset{s}{\sim} \mathfrak{M}_2^*.$$

Man kann den Satz 2 nun auch so formulieren:

Satz 2'. *Jeder Unterraum* $\boldsymbol{M} \leqq \boldsymbol{E}$ *(bzw.* $\boldsymbol{M}^* \leqq \boldsymbol{E}^*$*) bestimmt eineindeutig die Klasse der ihn rechtsseitig (bzw. linksseitig) erzeugenden, zueinander rechtsäquivalenten (bzw. linksäquivalenten) Matrizen.*

---

[6]) Nach Einführung der Matrizen als rechteckigen Schemata aus Elementen von $\boldsymbol{K}$ werden die Gleichheit, Addition und Multiplikation von Matrizen in der üblichen Weise definiert. Ist $\boldsymbol{K}$ nicht kommutativ, so gilt für die Transposition von Matrizenprodukten natürlich nicht mehr $(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})' = \mathfrak{B}' \cdot \mathfrak{A}'$. Eine Matrix kann in Teilmatrizen zerlegt bzw. aus ihnen durch Nebeneinander- und Untereinanderstellen aufgebaut werden; zwei Matrizen mit übereinstimmender Einteilung können so addiert werden, als ob die Teilmatrizen Körperelemente wären; das gleiche trifft auch für die Multiplikation zu, wenn die Zeilen des linken Faktors genau so unterteilt sind wie die Spalten des rechten Faktors.

(I 3) *Der Rang einer Matrix.* Es ist zunächst zwischen dem „rechtsseitigen Spaltenrang" $Rg_d\,\mathfrak{X}$ und dem „linksseitigen Zeilenrang" $Rg_s\,\mathfrak{X}$ einer Matrix $\mathfrak{X}$ zu unterscheiden. Man findet sehr leicht:

Satz 3. *Aus*

$$\mathfrak{M} \xrightarrow{d} \boldsymbol{M} \leqq \boldsymbol{E} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{M}^* \xrightarrow{s} \boldsymbol{M}^* \leqq \boldsymbol{E}^*$$

folgt

$$Rg_d\,\mathfrak{M} = dim\,\boldsymbol{M} \qquad \text{bzw.} \qquad Rg_s\,\mathfrak{M}^* = dim\,\boldsymbol{M}^*.$$

Satz 4. *Aus*

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{S} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{M}_1^* = \mathfrak{T} \cdot \mathfrak{M}_2^*$$

folgt

$$Rg_d\,\mathfrak{M}_1 \leqq Rg_d\,\mathfrak{M}_2 \qquad \text{bzw.} \qquad Rg_s\,\mathfrak{M}_1^* \leqq Rg_s\,\mathfrak{M}_2^*$$

und

$$Rg_s\,\mathfrak{M}_1 \leqq Rg_s\,\mathfrak{M}_2 \qquad \text{bzw.} \qquad Rg_d\,\mathfrak{M}_1^* \leqq Rg_d\,\mathfrak{M}_2^*.$$

Beweis. Die erste Aussage ergibt sich direkt aus den Sätzen 1 und 3. — Zu der zweiten Aussage gelangt man so: Sind irgendwelche Zeilen von $\mathfrak{M}_2$ linear abhängig, so sind es auch die entsprechenden Zeilen von $\mathfrak{M}_1$; sind also irgendwelche Zeilen von $\mathfrak{M}_1$ linear unabhängig, so sind es auch die entsprechenden Zeilen von $\mathfrak{M}_2$.

Nun ergibt sich unmittelbar:

Satz 5. *Aus*

$$\mathfrak{M}_1 \overset{d}{\sim} \mathfrak{M}_2 \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{M}_1^* \overset{s}{\sim} \mathfrak{M}_2^*$$

folgt

$$Rg_d\,\mathfrak{M}_1 = Rg_d\,\mathfrak{M}_2 \qquad \text{bzw.} \qquad Rg_s\,\mathfrak{M}_1^* = Rg_s\,\mathfrak{M}_2^*$$

und

$$Rg_s\,\mathfrak{M}_1 = Rg_s\,\mathfrak{M}_2 \qquad \text{bzw.} \qquad Rg_d\,\mathfrak{M}_1^* = Rg_d\,\mathfrak{M}_2^*.$$

Dieser Satz führt zu dem bekannten

Satz 6. *Der rechtsseitige Spaltenrang und der linksseitige Zeilenrang einer Matrix $\mathfrak{X}$ sind einander gleich:*

$$Rg_d\,\mathfrak{X} = Rg_s\,\mathfrak{X}.$$

Von jetzt ab ist es also nicht mehr nötig, $Rg_d\mathfrak{X}$ und $Rg_s\mathfrak{X}$ voneinander zu unterscheiden; an ihre Stelle tritt daher die übliche Bezeichnung $Rg\,\mathfrak{X}$.

(I 4) *Konträre Matrizen.* Ist $\mathfrak{M}$ eine n-zeilige Matrix, so wird eine zu ihr „linkskonträre" Matrix $^\circ\mathfrak{M}$[7]) dadurch eingeführt, daß $\mathfrak{M} \xrightarrow{d} \boldsymbol{M} \leqq \boldsymbol{E}$ mit $^\circ\mathfrak{M} \xrightarrow{s} {}^\circ\boldsymbol{M} \leqq \boldsymbol{E}^*$ gleichwertig sein soll. Ganz entsprechend wird eine zu einer n-spaltigen Matrix $\mathfrak{M}^*$ „rechtskonträre" Matrix $\mathfrak{M}^{*\circ}$ definiert. — Daraus ergibt sich ohne Mühe:

$$(\text{I 4a}) \qquad {}^\circ\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{M} = \mathfrak{O} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}^* \cdot \mathfrak{M}^{*\circ} = \mathfrak{O}$$

[7]) Die Bezeichnung $^\circ\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}^{*\circ}$ wird in [4], S. 7 für die linksseitigen bzw. rechtsseitigen Nullteiler von $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}^*$ eingeführt, während es sich hier um die Rechts- bzw. Linksteiler aller links- bzw. rechtsseitigen Nullteiler handelt. Eine Verwechslung des rechts oben angeschriebenen Zeichens $^\circ$ mit Exponenten ist wohl kaum zu befürchten

sowie der

Satz 7. *Die Klasse der Rechtsäquivalenten von* $\mathfrak{M}$ *(bzw.* $\mathfrak{M}^{*\circ}$*) und die Klasse der Linksäquivalenten von* ${}^{\circ}\mathfrak{M}$ *(bzw.* $\mathfrak{M}^{*}$*) bestimmen einander eineindeutig.* — Beweis aus (I 1c) und Satz 2'. — Man kann Satz 7 auch so ausdrücken:

Satz 7'. *Die Relationen*

$$\mathfrak{M}_1 \overset{d}{\sim} \mathfrak{M}_2 \quad \textit{und} \quad {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \overset{s}{\sim} {}^{\circ}\mathfrak{M}_2 \quad \textit{bzw.} \quad \mathfrak{M}_1^{*} \overset{s}{\sim} \mathfrak{M}_2^{*} \quad \textit{und} \quad \mathfrak{M}_1^{*\circ} \overset{d}{\sim} \mathfrak{M}_2^{*\circ}$$

sind miteinander gleichwertig. — Oder ganz kurz:

$$({}^{\circ}\mathfrak{M})^{\circ} \overset{d}{\sim} \mathfrak{M} \quad \textit{bzw.} \quad {}^{\circ}(\mathfrak{M}^{*\circ}) \overset{s}{\sim} \mathfrak{M}^{*}.$$

Satz 8. *Aus*

$$\mathfrak{M}_1 \overset{d}{\to} \boldsymbol{M}_1 \subseteqq \boldsymbol{E} \textit{ und } \mathfrak{M}_2 \overset{d}{\to} \boldsymbol{M}_2 \subseteqq \boldsymbol{E} \textit{ bzw. } \mathfrak{M}_1^{*} \overset{s}{\to} \boldsymbol{M}_1^{*} \subseteqq \boldsymbol{E}^{*} \textit{ und } \mathfrak{M}_2^{*} \overset{s}{\to} \boldsymbol{M}_2^{*} \subseteqq \boldsymbol{E}^{*}$$

folgt

$$(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) \overset{d}{\to} \boldsymbol{M}_1 \cup \boldsymbol{M}_2 \quad \textit{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_1^{*} \\ \mathfrak{M}_2^{*} \end{pmatrix} \overset{s}{\to} \boldsymbol{M}_1^{*} \cup \boldsymbol{M}_2^{*},$$

sowie nach (I 1d)

$$\begin{pmatrix} {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \\ {}^{\circ}\mathfrak{M}_2 \end{pmatrix}^{\circ} \overset{d}{\to} \boldsymbol{M}_1 \cap \boldsymbol{M}_2 \quad \textit{bzw.} \quad {}^{\circ}(\mathfrak{M}_1^{*\circ}, \mathfrak{M}_2^{*\circ}) \overset{s}{\to} \boldsymbol{M}_1^{*} \cap \boldsymbol{M}_2^{*}.$$

Besonders sinnfällig werden die Vorzüge des Operierens mit einseitig äquivalenten und konträren Matrizen in dem

Theorem 1 (Haupttheorem über konträre Matrizen). *Sind* $\mathfrak{M}_1$ *und* $\mathfrak{M}_2$ *zwei n-zeilige (bzw.* $\mathfrak{M}_1^{*}$ *und* $\mathfrak{M}_2^{*}$ *zwei n-spaltige) Matrizen, so gilt:*

(I 4b) $$Rg\,(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) = Rg\,({}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2) + Rg\,\mathfrak{M}_1$$

bzw.

$$Rg \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_1^{*} \\ \mathfrak{M}_2^{*} \end{pmatrix} = Rg\,(\mathfrak{M}_1^{*} \cdot \mathfrak{M}_2^{*\circ}) + Rg\,\mathfrak{M}_2^{*}.$$

Beweis. Nach Satz 8 folgt aus $\mathfrak{M}_1 \overset{d}{\to} \boldsymbol{M}_1 \subseteqq \boldsymbol{E}$ und $\mathfrak{M}_2 \overset{d}{\to} \boldsymbol{M}_2 \subseteqq \boldsymbol{E}$:

$$\mathfrak{M}_{\boldsymbol{S}} = \begin{pmatrix} {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \\ {}^{\circ}\mathfrak{M}_2 \end{pmatrix}^{\circ} \overset{d}{\to} \boldsymbol{M}_1 \cap \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{S}$$

und nach Satz 1 existiert die Gleichung $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{S}} = \mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{S}$. Es gibt einen Unterraum $\boldsymbol{N}$, so daß $\boldsymbol{S} \oplus \boldsymbol{N} = \boldsymbol{M}_2$ ist; daraus folgt $\boldsymbol{M}_1 \oplus \boldsymbol{N} = \boldsymbol{M}_1 \cup \boldsymbol{M}_2$. Setzt man noch $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}} \overset{d}{\to} \boldsymbol{N}$ voraus, so ist zu schließen:

$${}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2 = {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot (\mathfrak{M}_{\boldsymbol{S}}, \mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}}) = {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot (\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{S}, \mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}}) = (\mathfrak{O}, {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}}) \overset{d}{\sim} {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}}$$

und

$${}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}} \overset{s}{\sim} \begin{pmatrix} {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}} \\ \mathfrak{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}} \\ {}^{\circ}\mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}} \cdot \mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \\ {}^{\circ}\mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}} \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}} \overset{s}{\sim} \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}} = \mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}},$$

daher ist nach Satz 5, Satz 3 und (I 1e)

$$Rg\,({}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2) = Rg\,\mathfrak{M}_{\boldsymbol{N}}$$
$$= dim\,\boldsymbol{N} = dim\,(\boldsymbol{M}_1 \cup \boldsymbol{M}_2) - dim\,\boldsymbol{M}_1 = Rg\,(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) - Rg\,\mathfrak{M}_1.$$

(I 5) *Folgerungen aus dem Haupttheorem.* Das Theorem 1 ist ein Kernsatz der linearen Algebra; denn es läßt sich, wie eben gezeigt wurde, unmittelbar aus den Grundlagen herleiten und führt sofort zu verschiedenen wichtigen und bekannten Sätzen der determinantenfreien linearen Algebra, die sonst kaum einen engeren Zusammenhang erkennen lassen[8]):

Satz 9.

$$Rg\,\mathfrak{M} + Rg\,{}^{\circ}\mathfrak{M} = n \quad \text{bzw.} \quad Rg\,\mathfrak{M}^* + Rg\,\mathfrak{M}^{*\circ} = n.$$

Beweis.

$$Rg\,\mathfrak{M} + Rg\,({}^{\circ}\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{E}) = Rg\,(\mathfrak{M}, \mathfrak{E}) = Rg\,\mathfrak{E} = n.$$

Satz 10.

$$dim\,\boldsymbol{M}_1 + dim\,\boldsymbol{M}_2 = dim\,(\boldsymbol{M}_1 \cup \boldsymbol{M}_2) + dim\,(\boldsymbol{M}_1 \cap \boldsymbol{M}_2).$$

Beweis. Aus (I 4c) und Satz 9 folgt

$$Rg\begin{pmatrix}{}^{\circ}\mathfrak{M}_1\\ {}^{\circ}\mathfrak{M}_2\end{pmatrix}^{\circ} = -\,Rg\,({}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2) + Rg\,\mathfrak{M}_2,$$

woraus sich durch Addition von (I 4b) die Behauptung ergibt.

Satz 11 (SYLVESTERs Law of nullity). *Ist $\mathfrak{P}$ eine n-spaltige, und $\mathfrak{Q}$ eine n-zeilige Matrix, so gilt:*

$$Max\,(0, Rg\,\mathfrak{P} + Rg\,\mathfrak{Q} - n) \leq Rg\,(\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{Q}) \leq Min\,(Rg\,\mathfrak{P}, Rg\,\mathfrak{Q}).$$

Beweis. Aus

$$Max\,(Rg\,\mathfrak{P}^{\circ}, Rg\,\mathfrak{Q}) \leq Rg\,(\mathfrak{P}^{\circ}, \mathfrak{Q}) \leq Min\,(n, Rg\,\mathfrak{P}^{\circ} + Rg\,\mathfrak{Q})$$

folgt die Behauptung durch Einsetzen von

$$Rg\,(\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{Q}) = Rg\,(\mathfrak{P}^{\circ}, \mathfrak{Q}) - Rg\,\mathfrak{P}^{\circ} = Rg\,(\mathfrak{P}^{\circ}, \mathfrak{Q}) + Rg\,\mathfrak{P} - n.$$

Satz 12. *Ist $\mathfrak{R}$ eine n-reihige invertierbare Matrix, so ist*

$${}^{\circ}(\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{M}) \overset{s}{\sim} {}^{\circ}\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{R}^{-1} \quad \text{und} \quad (\mathfrak{M}^* \cdot \mathfrak{R}^{-1})^{\circ} \overset{d}{\sim} \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{M}^{*\circ}.$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus $({}^{\circ}\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{R}^{-1}) \cdot (\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{M}) = \mathfrak{O}$ und

$$Rg\,({}^{\circ}\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{R}^{-1}) = Rg\,{}^{\circ}\mathfrak{M} = n - Rg\,\mathfrak{M} = n - Rg\,(\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{M}) = Rg\,{}^{\circ}(\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{M}).$$

Theorem 2. *${}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2$ ist genau dann invertierbar, wenn ${}^{\circ}\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ minimal sind, und wenn $\boldsymbol{M}_1 \oplus \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{E}$ ist.* — Bei grundsätzlicher Verwendung minimaler erzeugender Matrizen ist also ${}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2$ genau dann invertierbar, wenn ${}^{\circ}\mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{M}_1$ invertierbar ist. —

[8]) Außer den folgenden Sätzen kann auch der Satz über die Lösbarkeit eines linearen inhomogenen Gleichungssystems auf Theorem 1 zurückgeführt werden.

Beweis. 1. $^\circ\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2$ sei invertierbar und r-reihig; dann folgt

(I 5a) $$r = Rg\,(^\circ\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2) \leqq Min\,(Rg\,^\circ\mathfrak{M}_1,\ Rg\,\mathfrak{M}_2) \leqq r \leqq n$$

d.h. die r Zeilen von $^\circ\mathfrak{M}_1$ und die r Spalten von $\mathfrak{M}_2$ sind jeweils linear unabhängig, und es ergibt sich

$$\left\{\begin{array}{ll} Rg\,(^\circ\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2) = Rg\,^\circ\mathfrak{M}_1 & Rg\,(^\circ\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2) = Rg\,\mathfrak{M}_2 \\ Rg\,(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) = Rg\,(^\circ\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2) + Rg\,\mathfrak{M}_1 & Rg\begin{pmatrix}^\circ\mathfrak{M}_1\\ ^\circ\mathfrak{M}_2\end{pmatrix}^\circ = -\,Rg\,(^\circ\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2) + Rg\,\mathfrak{M}_2 \\ \quad = Rg\,^\circ\mathfrak{M}_1 + Rg\,\mathfrak{M}_1 = n & \quad = -\,Rg\,\mathfrak{M}_2 + Rg\,\mathfrak{M}_2 = 0 \\ \boldsymbol{M}_1 \cup \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{E} & \boldsymbol{M}_1 \cap \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{O}. \end{array}\right.$$

2. Die beiden Schlußketten unter (I 5b) sind umkehrbar; sind nun die Zeilen von $^\circ\mathfrak{M}_1$ und die Spalten von $\mathfrak{M}_2$ linear unabhängig, so ist $^\circ\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2$ offenbar invertierbar. — Im Anschluß an dieses Theorem ist noch folgender späterhin gebrauchter sehr einfacher Satz zu erwähnen:

Satz 13. *Bei grundsätzlicher Verwendung minimaler erzeugender Matrizen ist* $(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$ *und ebenso* $\begin{pmatrix}^\circ\mathfrak{M}_1\\ ^\circ\mathfrak{M}_2\end{pmatrix}$ *genau dann invertierbar, wenn* $\boldsymbol{M}_1 \oplus \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{E}$ *ist.*

(I 6) *Darstellung linearer Mannigfaltigkeiten durch Matrizen.* Aus den bekannten formalen Gründen wird in der projektiven Geometrie die Zahl n durch $n+1$ ersetzt. Eine lineare Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{V}^{(d,c)}$ (oder einfach $\boldsymbol{V}$) wird nach Belieben durch einen Unterraum $\boldsymbol{M} \leqq \boldsymbol{E}$ oder $^\circ\boldsymbol{M} \leqq \boldsymbol{E}^*$ repräsentiert; ihre Dimension $d = dim\,\boldsymbol{V}^{(d,c)} = dim\,\boldsymbol{M} - 1$ und ihre Codimension $c = codim\,\boldsymbol{V}^{(d,c)} = dim\,^\circ\boldsymbol{M} - 1$ ergänzen sich nach Satz 9 zu $n-1$. Die $\boldsymbol{V}^{(d,c)}$ mit $d = 0, 1, n-2$ und $n-1$ werden beziehentlich „Punkt", „Gerade", „Hypergerade" und „Hyperebene" genannt. Ferner ist $\boldsymbol{V}^{(-1,n)}$ der „leere Raum" und $\boldsymbol{V}^{(n,-1)}$ der „volle Raum". Von diesen beiden werden die übrigen $\boldsymbol{V}^{(d,c)}$ als „ordentliche" lineare Mannigfaltigkeiten unterschieden. Die Menge aller $\boldsymbol{V}^{(d,c)}$ ist der n-dimensionale projektive Raum $\boldsymbol{P}_n(\boldsymbol{K})$.

Im Hinblick auf Satz 12 wird eine rechtsseitig erzeugende Matrix $\mathfrak{M}$ von $\boldsymbol{M} \leqq \boldsymbol{E}$ als „kovariante" Koordinatenmatrix, und eine linksseitig erzeugende Matrix $^\circ\mathfrak{M}$ von $^\circ\boldsymbol{M} \leqq \boldsymbol{E}^*$ als „kontravariante" Koordinatenmatrix der durch $\boldsymbol{M}$ bzw. $^\circ\boldsymbol{M}$ repräsentierten linearen Mannigfaltigkeit bezeichnet.

Unter einer „Substitution" (einer $\boldsymbol{V}^{(d,c)}$) ist die Ersetzung einer kovarianten Koordinatenmatrix durch eine Rechtsäquivalente oder einer kontravarianten Koordinatenmatrix durch eine Linksäquivalente zu verstehen.

Eine „Kollineation" des $\boldsymbol{P}_n(\boldsymbol{K})$ ist die simultane Multiplikation aller kovarianten Koordinatenmatrizen mit einer $(n+1)$-reihigen invertierbaren Matrix $\mathfrak{R}$ von links und aller kontravarianten Koordinatenmatrizen mit $\mathfrak{R}^{-1}$ von rechts. (Vgl. Satz 12.)

Unter Zugrundelegung der einseitigen, anschaulichen Auffassung der linearen Mannigfaltigkeiten als Punktmannigfaltigkeiten werden für sie die Begriffe „Enthaltensein", „Gleichheit", „Schnitt", „Verbindung", „Komplementarität" und „Dimension" wie üblich im Anschluß an ihre kovariante

Darstellung definiert. Man kann diese Definition aber auch unter der bekannten Vertauschung jener Begriffe ebensogut an die kontravariante Darstellung anschließen (Dualitätsprinzip).

Eine „(g-gliedrige) Konfiguration" ist ein geordnetes g-Tupel von linearen Mannigfaltigkeiten. Zwei Konfigurationen $\{\boldsymbol{V}_1, \ldots, \boldsymbol{V}_g\}$ und $\{\hat{\boldsymbol{V}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{V}}_g\}$ sind projektiv äquivalent, wenn es eine Kollineation gibt, die gleichzeitig jede $\boldsymbol{V}_\gamma$ in die entsprechende $\hat{\boldsymbol{V}}_\gamma$ überführt. $\{\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_g\}$ ist eine kovariante, $\begin{Bmatrix} {}^\circ\mathfrak{M}_1 \\ \vdots \\ {}^\circ\mathfrak{M}_g \end{Bmatrix}$ eine kontravariante Darstellung einer Konfiguration und wird der Einfachheit halber auch selbst als Konfiguration bezeichnet.

II. Die verallgemeinerten Doppelverhältnisse.

(II 1) *Existenz und Invarianz der verallgemeinerten Doppelverhältnisse.* Im n-dimensionalen projektiven Raum $\boldsymbol{P}_n(\boldsymbol{K})$ seien zwei Hyperebenen durch die $(n+1)$-gliedrigen kontravarianten (Zeilen-)vektoren $\mathfrak{x}_1^*$ bzw. $\mathfrak{x}_2^*$ und zwei Punkte durch die $(n+1)$-gliedrigen kovarianten (Spalten-)vektoren $\mathfrak{x}_3$ bzw. $\mathfrak{x}_4$ gegeben. Über einem kommutativen Körper wird das Doppelverhältnis dieser Konfiguration bekanntlich eindeutig durch

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathfrak{x}_1^* \cdot \mathfrak{x}_3}{\mathfrak{x}_1^* \cdot \mathfrak{x}_4} : \frac{\mathfrak{x}_2^* \cdot \mathfrak{x}_3}{\mathfrak{x}_2^* \cdot \mathfrak{x}_4}$$

definiert; über einem nichtkommutativen Körper erhält man dagegen nach SPERNER das bis auf innere Automorphismen dieses Körpers eindeutig bestimmte Doppelverhältnis[9])

(II 1a) $$\boldsymbol{a} = (\mathfrak{x}_1^* \cdot \mathfrak{x}_4)^{-1} \cdot (\mathfrak{x}_1^* \cdot \mathfrak{x}_3) \cdot (\mathfrak{x}_2^* \cdot \mathfrak{x}_3)^{-1} \cdot (\mathfrak{x}_2^* \cdot \mathfrak{x}_4).$$

Nun sei $\boldsymbol{K}$ wieder ein beliebiger Körper. Einer zunächst völlig unbestimmten viergliedrigen Konfiguration $\{\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3, \boldsymbol{V}_4\}$ im $\boldsymbol{P}_n(\boldsymbol{K})$ wird analog zu (II 1a) formal die Matrix

(II 1b) $$\mathfrak{A} = ({}^\circ\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_4)^{-1} \cdot ({}^\circ\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_3) \cdot ({}^\circ\mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{M}_3)^{-1} \cdot ({}^\circ\mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{M}_4)$$

zugeordnet, wobei ${}^\circ\mathfrak{M}_1$ und ${}^\circ\mathfrak{M}_2$ kontravariante Koordinatenmatrizen von $\boldsymbol{V}_1$ bzw. $\boldsymbol{V}_2$, dagegen $\mathfrak{M}_3$ und $\mathfrak{M}_4$ kovariante Koordinatenmatrizen von $\boldsymbol{V}_3$ bzw. $\boldsymbol{V}_4$ sein sollen. — Aus Theorem 2 ergibt sich sofort

Satz 14. *Notwendig und hinreichend für die Existenz von* $\mathfrak{A}$ *in* (II 1b) *ist, daß sämtliche darin vorkommenden Koordinatenmatrizen minimal sind, und daß gilt:*

$$\boldsymbol{V}_1 \oplus \boldsymbol{V}_4 = \boldsymbol{V}^{(n,\,-1)} \quad \textit{und} \quad \boldsymbol{V}_2 \oplus \boldsymbol{V}_3 = \boldsymbol{V}^{(n,\,-1)}.$$

Die Minimaleigenschaft aller benutzten Koordinatenmatrizen wird daher von nun ab immer stillschweigend vorausgesetzt. — Man beachte, daß ${}^\circ\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_3$ und ${}^\circ\mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{M}_4$ in (II 1b) nicht quadratisch zu sein brauchen, daß aber $\mathfrak{A}$ stets quadratisch ist. — Zur Untersuchung des Transformations-

[9]) Vgl. [7], Gl. (24).

verhaltens von $\mathfrak{A}$ wird die Ähnlichkeit zweier m-reihiger Matrizen $\mathfrak{X}$ und $\bar{\mathfrak{X}}$ wie üblich durch die Existenz einer m-reihigen invertierbaren Matrix $\mathfrak{P}$ erklärt, die die Gleichung $\bar{\mathfrak{X}} = \mathfrak{P}^{-1} \cdot \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{P}$ erfüllt; die Klasse der zu $\mathfrak{X}$ ähnlichen Matrizen wird mit $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{X})$ bezeichnet.

Satz 15. *Die aus der Matrix* $\mathfrak{A}$ *in* (II 1b) *gebildete Matrizenklasse* $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A})$ *ist projektiv invariant.*

Beweis. Die Koordinatenmatrizen sind den Transformationen

$$^{\circ}\bar{\mathfrak{M}}_1 = \mathfrak{T}_1 \cdot {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{K}^{-1}, \quad {}^{\circ}\bar{\mathfrak{M}}_2 = \mathfrak{T}_2 \cdot {}^{\circ}\mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{K}^{-1}, \quad \bar{\mathfrak{M}}_3 = \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{M}_3 \cdot \mathfrak{S}_3, \quad \bar{\mathfrak{M}}_4 = \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{M}_4 \cdot \mathfrak{S}_4$$

mit einer $(n+1)$-reihigen invertierbaren Kollineationsmatrix $\mathfrak{K}$ zu unterwerfen; die Substitutionsmatrizen $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{S}_3$ und $\mathfrak{S}_4$ sind ebenfalls invertierbar, weil alle Koordinatenmatrizen minimal sein sollen. Man rechnet nun leicht nach:

$$\text{(II 1c)} \quad \begin{cases} \bar{\mathfrak{A}} = ({}^{\circ}\bar{\mathfrak{M}}_1 \cdot \bar{\mathfrak{M}}_4)^{-1} \cdot ({}^{\circ}\bar{\mathfrak{M}}_1 \cdot \bar{\mathfrak{M}}_3) \cdot ({}^{\circ}\bar{\mathfrak{M}}_2 \cdot \bar{\mathfrak{M}}_3)^{-1} \cdot ({}^{\circ}\bar{\mathfrak{M}}_2 \cdot \bar{\mathfrak{M}}_4) \\ \quad = (\mathfrak{T}_1 \cdot {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_4 \cdot \mathfrak{S}_4)^{-1} \cdot (\mathfrak{T}_1 \cdot {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_3 \cdot \mathfrak{S}_3) \cdot (\mathfrak{T}_2 \cdot {}^{\circ}\mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{M}_3 \cdot \mathfrak{S}_3)^{-1} \times \\ \quad\quad \times (\mathfrak{T}_2 \cdot {}^{\circ}\mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{M}_4 \cdot \mathfrak{S}_4) = \mathfrak{S}_4^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{S}_4. \end{cases}$$

— Es erscheint hiernach gerechtfertigt, $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A})$ als ein verallgemeinertes Doppelverhältnis zu bezeichnen. —

(II 2) *Permutationsverhalten der verallgemeinerten Doppelverhältnisse.* Um das Verhalten von $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A})$ gegenüber Permutationen der vier Mannigfaltigkeiten der Konfiguration zu studieren, werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\text{(II 2a)} \qquad (\alpha;\beta) = {}^{\circ}\mathfrak{M}_\alpha \cdot \mathfrak{M}_\beta,$$

$$\text{(II 2b)} \qquad \alpha \oplus \beta \quad \text{bedeutet} \quad \boldsymbol{V}_\alpha \oplus \boldsymbol{V}_\beta = \boldsymbol{V}^{(n,\,-1)}.$$

— Nach Theorem 2 sind also $(\alpha;\beta)$ und $(\beta;\alpha)$ genau dann invertierbar, wenn $\alpha \oplus \beta$ ist. —

$$\text{(II 2c)} \qquad (\alpha,\beta;\gamma,\delta) = \boldsymbol{\Gamma}\big((\alpha;\delta)^{-1} \cdot (\alpha;\gamma) \cdot (\beta;\gamma)^{-1} \cdot (\beta;\delta)\big),$$

$$\text{(II 2d)} \quad \begin{cases} \mathfrak{A} = (1;4)^{-1} \cdot (1;3) \cdot (2;3)^{-1} \cdot (2;4), & \text{also} \quad (1;2;3,4) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A}) \\ \mathfrak{B} = (2;3)^{-1} \cdot (2;4) \cdot (1;4)^{-1} \cdot (1;3), & \text{also} \quad (2,1;4,3) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{B}) \\ \mathfrak{C} = (3;2)^{-1} \cdot (3;1) \cdot (4;1)^{-1} \cdot (4;2), & \text{also} \quad (3,4;1,2) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{C}) \\ \mathfrak{D} = (4;1)^{-1} \cdot (4;2) \cdot (3;2)^{-1} \cdot (3;1), & \text{also} \quad (4,3;2,1) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{D}). \end{cases}$$

Satz 16. *Ist* $1 \oplus 4$ *und* $2 \oplus 3$, *so gilt:*

$$\boldsymbol{\Gamma}\big((1;3) \cdot (2;3)^{-1} \cdot (2;4) \cdot (1;4)^{-1}\big) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A}).$$

Beweis.

$$(1;3) \cdot (2;3)^{-1} \cdot (2;4) \cdot (1;4)^{-1} = (1;4) \cdot \mathfrak{A} \cdot (1;4)^{-1}.$$

— Demnach sind unter (II 2c) alle wesentlich verschiedenen Doppelverhältnisse erfaßt. —

Satz 17. *Ist* $1 \oplus 4$ *und* $2 \oplus 3$, *so gilt:*

$$(1,3;2,4) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{E} - \mathfrak{A}).$$

Beweis. Die Hilfsmatrix

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{M}_2 \cdot ({}^{\circ}\mathfrak{M}_3 \cdot \mathfrak{M}_2)^{-1} \cdot {}^{\circ}\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_3 \cdot ({}^{\circ}\mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{M}_3)^{-1} \cdot {}^{\circ}\mathfrak{M}_2$$

erfüllt, wie man leicht nachrechnet, die Gleichung

$$\mathfrak{H} \cdot (\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3) = (\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3).$$

Da $(\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3)$ nach Satz 13 invertierbar ist, erweist sich $\mathfrak{H}$ als die $(n+1)$-reihige Einheitsmatrix; daher ist

$$\begin{aligned}(1,3;2,4) &= \Gamma\big((1;4)^{-1} \cdot (1;2) \cdot (3;2)^{-1} \cdot (3;4)\big)\\ &= \Gamma\big((1;4)^{-1} \cdot {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot [\mathfrak{M}_2 \cdot (3;2)^{-1} \cdot {}^{\circ}\mathfrak{M}_3] \cdot \mathfrak{M}_4\big)\\ &= \Gamma\big((1;4)^{-1} \cdot {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot [\mathfrak{E} - \mathfrak{M}_3 \cdot (2;3)^{-1} \cdot {}^{\circ}\mathfrak{M}_2] \cdot \mathfrak{M}_4\big)\\ &= \Gamma\big(\mathfrak{E} - (1;4)^{-1} \cdot (1;3) \cdot (2;3)^{-1} \cdot (2;4)\big) = \Gamma(\mathfrak{E} - \mathfrak{A}).\end{aligned}$$

(Die Einheitsmatrix in den beiden letzten Termen ist im allgemeinen nicht $(n+1)$-reihig, sondern hat soviel Reihen wie $\mathfrak{A}$.)

Satz 18. *Ist außer $1 \oplus 4$ und $2 \oplus 3$ auch noch $1 \oplus 3$ oder $2 \oplus 4$ oder beides, so gilt*[10]*:*

$$\Gamma(\mathfrak{B}) = \Gamma(\mathfrak{A}) \quad \text{und} \quad \Gamma(\mathfrak{D}) = \Gamma(\mathfrak{C}).$$

Beweis. Aus (II 2d) entnimmt man leicht

$$\mathfrak{B} = (1;3)^{-1} \cdot (1;4) \cdot \mathfrak{A} \cdot (1;4)^{-1} \cdot (1;3) \text{ oder } \mathfrak{B} = (2;3)^{-1} \cdot (2;4) \cdot \mathfrak{A} \cdot (2;4)^{-1} \cdot (2;3).$$

Satz 19. *Ist außer $1 \oplus 4$ und $2 \oplus 3$ auch noch $1 \oplus 2$ oder $3 \oplus 4$ oder beides, so gilt:*

$$\Gamma(\mathfrak{C}) = \Gamma(\mathfrak{A}) \quad \text{und} \quad \Gamma(\mathfrak{D}) = \Gamma(\mathfrak{B}).$$

Beweis. Unter Verwendung von Satz 17 und $1 \oplus 2$ erhält man:

$$\begin{aligned}\mathfrak{C} &= \mathfrak{E} - (\mathfrak{E} - \mathfrak{C}) = \mathfrak{E} - (3;2)^{-1} \cdot (3;4) \cdot (1;4)^{-1} \cdot (1;2)\\ &= (1;2)^{-1} \cdot (1;4) \cdot [\mathfrak{E} - (1;4)^{-1} \cdot (1;2) \cdot (3;2)^{-1} \cdot (3;4)] \cdot (1;4)^{-1} \cdot (1;2)\\ &= (1;2)^{-1} \cdot (1;4) \cdot \mathfrak{A} \cdot (1;4)^{-1} \cdot (1;2).\end{aligned}$$

Satz 20. *Ist außer $1 \oplus 4$ und $2 \oplus 3$ auch noch $1 \oplus 3$ und $2 \oplus 4$, so gilt:*

$$(1,2;4,3) = \Gamma(\mathfrak{A}^{-1}).$$

Beweis.

$$\begin{aligned}(1,2;4,3) &= \Gamma\big((1;3)^{-1} \cdot (1;4) \cdot (2;4)^{-1} \cdot (2;3)\big)\\ = \Gamma\big((1;3)^{-1} \cdot (1;4) \cdot [(1;4)^{-1} \cdot (1;3) \cdot (2;3)^{-1} \cdot (2;4)]^{-1} \cdot (1;4)^{-1} \cdot (1;3)\big) &= \Gamma(\mathfrak{A}^{-1}).\end{aligned}$$

[10]) $1 \oplus 3$ oder $2 \oplus 4$ sind keine notwendigen Bedingungen für $\Gamma(\mathfrak{B}) = \Gamma(\mathfrak{A})$ und $\Gamma(\mathfrak{C}) = \Gamma(\mathfrak{D})$, wie man an dem folgenden Beispiel erkennt:

$$\left\{\begin{pmatrix}\mathfrak{E}, \mathfrak{D}\\ \mathfrak{D}, \mathfrak{E}\\ \mathfrak{D}, \mathfrak{D}\\ \mathfrak{D}, \mathfrak{D}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{E}, \mathfrak{D}\\ \mathfrak{D}, \mathfrak{D}\\ \mathfrak{D}, \mathfrak{E}\\ \mathfrak{D}, \mathfrak{D}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{D}, \mathfrak{D}\\ \mathfrak{E}, \mathfrak{D}\\ \mathfrak{D}, \mathfrak{D}\\ \mathfrak{D}, \mathfrak{E}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{D}, \mathfrak{Y}\\ \mathfrak{X}, \mathfrak{D}\\ \mathfrak{E}, \mathfrak{D}\\ \mathfrak{D}, \mathfrak{E}\end{pmatrix}\right\}.$$

(Alle Teilmatrizen sind $\frac{n+1}{4}$-reihig, weder $\mathfrak{X}$ noch $\mathfrak{Y}$ invertierbar.)

Die Sätze 17 bis 20 werden übersichtlich zusammengefaßt in der Tabelle (II 2e).

(II 2e)

$(1,2;3,4) = \Gamma(\mathfrak{A})$ $1 \oplus 3 \leftarrow$	$(2,1;4,3) = \Gamma(\mathfrak{B})$ $\rightarrow 2 \oplus 4$	$(3,4;1,2) = \Gamma(\mathfrak{C})$ $1 \oplus 3 \leftarrow$	$(4,3;2,1) = \Gamma(\mathfrak{D})$ $\rightarrow 2 \oplus 4$	$1 \oplus 4$ $2 \oplus 3$
$(1,3;2,4) = \Gamma(\mathfrak{E} - \mathfrak{A})$ $1 \oplus 2 \leftarrow$	$(2,4;1,3) = \Gamma(\mathfrak{E} - \mathfrak{B})$ $1 \oplus 2 \leftarrow$	$(3,1;4,2) = \Gamma(\mathfrak{E} - \mathfrak{C})$ $\rightarrow 3 \oplus 4$	$(4,2;3,1) = \Gamma(\mathfrak{E} - \mathfrak{D})$ $\rightarrow 3 \oplus 4$	
$(1,2;4,3) = \Gamma(\mathfrak{A}^{-1})$ $1 \oplus 4 \leftarrow$	$(2,1;3,4) = \Gamma(\mathfrak{B}^{-1})$ $\rightarrow 2 \oplus 3$	$(3,4;2,1) = \Gamma(\mathfrak{C}^{-1})$ $1 \oplus 4 \leftarrow$	$(4,3;1,2) = \Gamma(\mathfrak{D}^{-1})$ $\rightarrow 2 \oplus 3$	$1 \oplus 3$ $2 \oplus 4$
$(1,4;2,3) = \Gamma(\mathfrak{E} - \mathfrak{A}^{-1})$ $1 \oplus 2 \leftarrow$	$(2,3;1,4) = \Gamma(\mathfrak{E} - \mathfrak{B}^{-1})$ $1 \oplus 2 \leftarrow$	$(3,2;4,1) = \Gamma(\mathfrak{E} - \mathfrak{C}^{-1})$ $\rightarrow 3 \oplus 4$	$(4,1;3,2) = \Gamma(\mathfrak{E} - \mathfrak{D}^{-1})$ $\rightarrow 3 \oplus 4$	
$(1,3;4,2) = \Gamma(\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1})$ $1 \oplus 4 \leftarrow$	$(2,4;3,1) = \Gamma((\mathfrak{E} - \mathfrak{B})^{-1})$ $1 \oplus 4 \leftarrow$	$(3,1;2,4) = \Gamma((\mathfrak{E} - \mathfrak{C})^{-1})$ $\rightarrow 2 \oplus 3$	$(4,2;1,3) = \Gamma((\mathfrak{E} - \mathfrak{D})^{-1})$ $\rightarrow 2 \oplus 3$	$1 \oplus 2$ $3 \oplus 4$
$(1,4;3,2) = \Gamma(\mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{A} - \mathfrak{E})^{-1})$ $1 \oplus 3 \leftarrow$	$(2,3;4,1) = \Gamma(\mathfrak{B} \cdot (\mathfrak{B} - \mathfrak{E})^{-1})$ $1 \oplus 3 \leftarrow$	$(3,2;1,4) = \Gamma(\mathfrak{C} \cdot (\mathfrak{C} - \mathfrak{E})^{-1})$ $\rightarrow 2 \oplus 4$	$(4,1;2,3) = \Gamma(\mathfrak{D} \cdot (\mathfrak{D} - \mathfrak{E})^{-1})$ $\rightarrow 2 \oplus 4$	

Die Angaben rechts neben den geschweiften Klammern sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz der entsprechenden acht

Doppelverhältnisse nach Satz 14. — Je eine der Bedingungen an den Enden der Doppelpfeile genügt für die Gleichheit der durch den Doppelpfeil verbundenen Doppelverhältnisse nach Satz 18 und 19; sind zwei in einer Zeile stehende Doppelverhältnisse gleich, so sind selbstverständlich alle jeweils in derselben Zeile stehenden Doppelverhältnisse der beiden entsprechenden Spalten gleich. — Die Angaben innerhalb der Spalten sind aus den Sätzen 17 und 20 zu entnehmen; existiert z. B. $(1, 2; 4, 3) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A}^{-1})$, aber nicht $(1, 2; 3, 4) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A})$, so wird als kurzes Symbol trotzdem $\mathfrak{A}^{-1}$ gebraucht, obwohl diese Matrix dann nicht invertierbar ist; entsprechend wird in analogen Fällen verfahren. — Das Permutationsverhalten der verallgemeinerten Doppelverhältnisse enthält offensichtlich das der gewöhnlichen als Sonderfall.

(II 3) *Bestimmung der verallgemeinerten Doppelverhältnisse durch Normierung der Koordinatenmatrizen.* Wir betrachten jetzt eine viergliedrige Konfiguration, die man als Verallgemeinerung der Konfiguration aus zwei Hyperebenen und zwei Punkten auffassen kann; sie ist gegeben durch die Lagebeziehungen

(II 3a) $\boldsymbol{V}_1 \cup \boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{V}^{(n,-1)}$. (II 3b) $\boldsymbol{V}_1 \oplus \boldsymbol{V}_3 = \boldsymbol{V}^{(n,-1)}$

(II 3c) $\boldsymbol{V}_2 \oplus \boldsymbol{V}_3 = \boldsymbol{V}^{(n,-1)}$ (II 3d) $\boldsymbol{V}_1 \oplus \boldsymbol{V}_4 = \boldsymbol{V}^{(n,-1)}$.

Aus ihnen folgt nach Satz 10 beziehentlich $(d_\alpha = dim\, \boldsymbol{V}_\alpha)$

(II 3e) $d_1 + d_2 \geq n-1$; $d_1 + d_3 = n-1$; $d_2 + d_3 = n-1$; $d_1 + d_4 = n-1$

und nach Einführung von $d = d_1$:

(II 3f) $$\begin{cases} d_1 = d_2 = d; \quad d_3 = d_4 = n - d - 1; \quad d_{1\cap 2} = 2 \cdot d - n; \\ d_{(1\cap 2)\cup 3} = d. \end{cases}$$

Satz 21. *Genau dann, wenn eine viergliedrige Konfiguration die Lagebeziehungen* (II 3a) *bis* (II 3d) *erfüllt, kann eine beliebige kovariante Darstellung dieser Konfiguration auf die Normalform*

(II 3g) $$\left\{ \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathfrak{O} \\ \mathfrak{E} \\ \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathfrak{F} \\ \mathfrak{A} \\ \mathfrak{E} \end{pmatrix} \right\}$$

transformiert werden, aus der ihre Doppelverhältnisse

(II 3h) $$\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A}) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{B}) \quad und \quad \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{C}) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{D}) = \boldsymbol{\Gamma}\begin{pmatrix} \mathfrak{E}, \mathfrak{F} \\ \mathfrak{O}, \mathfrak{A} \end{pmatrix}$$

unmittelbar ersichtlich sind.

Beweis[11]). 1. Aus (II 3g) sind die Lagebeziehungen (II 3a) bis (II 3d) nach Theorem 2 oder Satz 13 leicht abzulesen. —

[11]) Nebeneinanderstehende Teilmatrizen haben gleich viele Zeilen, untereinanderstehende gleich viele Spalten. Dadurch läßt sich die Zeilen- und Spaltenzahl jeder einzelnen Teilmatrix mittels (II 3f) bestimmen, und die Ausführbarkeit der angegebenen Additionen und Multiplikationen nachprüfen.

2. Sind die Lagebeziehungen (II 3a) bis (II 3d) gegeben, so werden $\boldsymbol{S}$, $\widetilde{\boldsymbol{V}}_1$ und $\widetilde{\boldsymbol{V}}_2$ eingeführt durch:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{V}_1 \cap \boldsymbol{V}_2; \quad \boldsymbol{S} \oplus \widetilde{\boldsymbol{V}}_1 = \boldsymbol{V}_1; \quad \boldsymbol{S} \oplus \widetilde{\boldsymbol{V}}_2 = \boldsymbol{V}_2.$$

Daraus folgt $\boldsymbol{S} \oplus \widetilde{\boldsymbol{V}}_1 \oplus \widetilde{\boldsymbol{V}}_2 = \boldsymbol{V}_1 \cup \boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{V}^{(n,\,-1)}$. Nun seien $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{S}}$, $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$ und $\widetilde{\mathfrak{M}}_2$ minimale kovariante Koordinatenmatrizen von $\boldsymbol{S}$, $\widetilde{\boldsymbol{V}}_1$ bzw. $\widetilde{\boldsymbol{V}}_2$; nach Satz 2 gibt es Substitutionsmatrizen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$, so daß

$$\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{S}_1 = (\mathfrak{M}_{\boldsymbol{S}}, \widetilde{\mathfrak{M}}_1) \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{S}_2 = (\mathfrak{M}_{\boldsymbol{S}}, \widetilde{\mathfrak{M}}_2)$$

gilt. Die $(n+1)$-reihige Matrix $(\mathfrak{M}_{\boldsymbol{S}}, \widetilde{\mathfrak{M}}_1, \widetilde{\mathfrak{M}}_2)$ ist nach Satz 13 invertierbar; daher ergibt die Kollineation mit $\mathfrak{K} = (\mathfrak{M}_{\boldsymbol{S}}, \widetilde{\mathfrak{M}}_1, \widetilde{\mathfrak{M}}_2)^{-1}$ und die gleichzeitige Substitution mit $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ die Normalform

$$\text{(II 3i)} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, \mathfrak{E} \\ \mathfrak{O}, \mathfrak{O} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathfrak{P}_3 \\ \mathfrak{Q}_3 \\ \mathfrak{R}_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathfrak{P}_4 \\ \mathfrak{Q}_4 \\ \mathfrak{R}_4 \end{pmatrix} \right\}$$

aus (II 3b) bis (II 3d) folgt nach Theorem 2, daß die $(n-d)$-reihigen Matrizen $\mathfrak{R}_3, \mathfrak{Q}_3$ und $\mathfrak{R}_4$ invertierbar sind, weil

$$\mathfrak{R}_3 = (\mathfrak{O}, \mathfrak{O}, \mathfrak{E}) \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{P}_3 \\ \mathfrak{Q}_3 \\ \mathfrak{R}_3 \end{pmatrix} = {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_3, \qquad \mathfrak{Q}_3 = {}^{\circ}\mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{M}_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{R}_4 = {}^{\circ}\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_4$$

ist. Durch die Transformation

$$\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & -\mathfrak{P}_3 \cdot \mathfrak{Q}_3^{-1}, & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{Q}_3^{-1}, & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{O}, & \mathfrak{R}_3^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \mathfrak{P}_3 \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{Q}_3 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S}_2 = \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{R}_3 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S}_4 = \mathfrak{R}_4^{-1} \cdot \mathfrak{R}_3$$

geht deshalb (II 3i) in (II 3g) mit

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{Q}_3^{-1} \cdot \mathfrak{Q}_4 \cdot \mathfrak{R}_4^{-1} \cdot \mathfrak{R}_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{F} = (\mathfrak{P}_4 - \mathfrak{P}_3 \cdot \mathfrak{Q}_3^{-1} \cdot \mathfrak{Q}_4) \cdot \mathfrak{R}_4^{-1} \cdot \mathfrak{R}_3$$

über; die Gln. (II 3h) erhält man nach (II 2d) und Satz 18.

(II 4) *Vollständigkeit der verallgemeinerten Doppelverhältnisse.* Es ist nun die Frage zu klären, ob die Doppelverhältnisse (II 3h) ein vollständiges Invariantensystem der Konfiguration (II 3g) darstellen. Zur Beantwortung muß etwas weiter ausgeholt werden:

Satz 22. *Sind die beiden Normalformen*

$$\text{(II 4a)} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, \mathfrak{E} \\ \mathfrak{O}, \mathfrak{O} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathfrak{O} \\ \mathfrak{E} \\ \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathfrak{F} \\ \mathfrak{A} \\ \mathfrak{E} \end{pmatrix} \right\}$$

und

$$\text{(II 4â)} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, \mathfrak{E} \\ \mathfrak{O}, \mathfrak{O} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathfrak{O} \\ \mathfrak{E} \\ \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widehat{\mathfrak{F}} \\ \widehat{\mathfrak{A}} \end{pmatrix} \right\}$$

projektiv äquivalent, so ist die allgemeinste Transformation, die sie ineinander überführt, vom Typ

$$\text{(II 4b)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{R} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}^{-1}, & \mathfrak{Q}^{-1}\cdot\mathfrak{N}\cdot\mathfrak{R}^{-1}, & -\mathfrak{Q}^{-1}\cdot\mathfrak{N}\cdot\mathfrak{R}^{-1} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{R}^{-1}, & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{O}, & \mathfrak{R}^{-1} \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{S}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}, & -\mathfrak{N} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{R} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S}_2 = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}, & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{R} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}_4 = \mathfrak{R}. \end{cases}$$

— Zum Beweis nimmt man die Transformationsmatrizen ganz beliebig an, nur entsprechend unterteilt und selbstverständlich invertierbar, und führt dann einen Koeffizientenvergleich durch. — Führt die Transformation (II 4b) etwa (II 4a) in (II 4â) über, so erhält man wie in (II 1c):

$$\text{(II 4c)} \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \hat{\mathfrak{F}} \\ \mathfrak{O}, & \hat{\mathfrak{A}} \end{pmatrix} = \hat{\mathfrak{D}} = \mathfrak{S}_1^{-1}\cdot\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{S}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}^{-1}, & \mathfrak{Q}^{-1}\cdot\mathfrak{N}\cdot\mathfrak{R}^{-1} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{R}^{-1} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{A} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \mathfrak{Q}, & -\mathfrak{N} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{R} \end{pmatrix}$$

woraus sofort

$$\text{(II 4c')} \quad \hat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{R}^{-1}\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{R} \quad \text{und} \quad \text{(II 4c'')} \quad \hat{\mathfrak{F}} = \mathfrak{Q}^{-1}\cdot(\mathfrak{F} - \mathfrak{N}\cdot\mathfrak{R}^{-1}\cdot(\mathfrak{E} - \mathfrak{A}))\cdot\mathfrak{R}$$

folgt. — Wenn zwei Matrizen $\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{A} \end{pmatrix}$ und $\hat{\mathfrak{D}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \hat{\mathfrak{F}} \\ \mathfrak{O}, & \hat{\mathfrak{A}} \end{pmatrix}$ durch die spezielle Ähnlichkeitstransformation (II 4c) ineinander übergehen, dann werden sie „verschärft ähnlich" genannt, und die Klasse der zu $\begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{A} \end{pmatrix}$ verschärft ähnlichen Matrizen wird mit $\boldsymbol{\Gamma}_v\begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{A} \end{pmatrix}$ bezeichnet. Aus (II 4c) und (II 4c') entnimmt man, daß aus $\boldsymbol{\Gamma}_v\begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{A} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Gamma}_v\begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \hat{\mathfrak{F}} \\ \mathfrak{O}, & \hat{\mathfrak{A}} \end{pmatrix}$ sofort $\boldsymbol{\Gamma}\begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{A} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Gamma}\begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \hat{\mathfrak{F}} \\ \mathfrak{O}, & \hat{\mathfrak{A}} \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A}) = \boldsymbol{\Gamma}(\hat{\mathfrak{A}})$ folgt. Das Theorem 4 in (III 2)[12]) besagt, daß auch der umgekehrte Schluß richtig ist, und so gelangt man zu dem

Satz 23. $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{D}) = \boldsymbol{\Gamma}\begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{A} \end{pmatrix}$ *und* $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A})$ *bilden zusammen mit den Lagebeziehungen* (II 3a) *bis* (II 3d) *ein vollständiges Invariantensystem der Konfiguration*[13]).

[12]) Der Leser möge die Vorwegnahme von späteren Ergebnissen entschuldigen, die von dem hier Dargestellten selbstverständlich ganz unabhängig sind, und nur deshalb für sich behandelt werden, weil sie hier durch ihren umfangreichen Beweis und ihre selbständige Bedeutung stören würden.

[13]) Daß $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{D})$ oder $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A})$ allein im allgemeinen nicht ausreichen, um die Konfiguration bis auf Kollineation eindeutig zu bestimmen, erkennt man an folgenden Beispielen:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0 \\ 1&0 \\ 0&1 \\ 1&0 \\ 0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0 \\ 1&1 \\ 0&1 \\ 1&0 \\ 0&1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 0&1&1 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1&1 \\ 0&1 \end{pmatrix}$$

Beweis. Zwei Konfigurationen mit den Lagebeziehungen (II 3a) bis (II 3d) lassen sich nach Satz 21 auf die Normalformen (II 4a) bzw. (II 4â) transformieren; ist nun $\boldsymbol{\Gamma}\begin{pmatrix}\mathfrak{E}, & \mathfrak{F}\\ \mathfrak{D}, & \mathfrak{A}\end{pmatrix} = \boldsymbol{\Gamma}\begin{pmatrix}\mathfrak{E}, & \hat{\mathfrak{F}}\\ \mathfrak{D}, & \hat{\mathfrak{A}}\end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A}) = \boldsymbol{\Gamma}(\hat{\mathfrak{A}})$, so ist nach Theorem 4 $\boldsymbol{\Gamma}_\iota\begin{pmatrix}\mathfrak{E}, & \mathfrak{F}\\ \mathfrak{D}, & \mathfrak{A}\end{pmatrix} = \boldsymbol{\Gamma}_\iota\begin{pmatrix}\mathfrak{E}, & \hat{\mathfrak{F}}\\ \mathfrak{D}, & \hat{\mathfrak{A}}\end{pmatrix}$, das heißt es gibt Matrizen $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}$, die die Gln. (II 4c) bis (II 4c'') erfüllen; die aus ihnen gebildeten Transformationsmatrizen (II 4b) führen dann (II 4a) in (II 4â) über.

(II 5) *Die Ranginvarianten der verallgemeinerten Doppelverhältnisse.* Da ähnliche Matrizen stets den gleichen Rang haben, kann als Rang eines Doppelverhältnisses, d.h. einer Klasse ähnlicher Matrizen, einfach der Rang eines beliebigen Repräsentanten eingeführt werden. — Setzt man außer (II 3a) bis (II 3d) gewisse weitere Lagebeziehungen voraus, die mit Aussagen über den Rang bestimmter Doppelverhältnisse gleichwertig sind, so liefert schon $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{D})$ oder $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A})$ oder sogar $Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{D})$ zusammen mit jenen Lagebeziehungen ein vollständiges Invariantensystem der Konfiguration (II 3g). — Dazu sei vorweg festgestellt:

(II 5a)
$$\left\{\begin{aligned} Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{D}) &= Rg\begin{pmatrix}-\mathfrak{F}\\ \mathfrak{E}-\mathfrak{A}\end{pmatrix} = Rg\left(\begin{pmatrix}-\mathfrak{E}, & \mathfrak{O}, & \mathfrak{O}\\ \mathfrak{O}, & -\mathfrak{E}, & \mathfrak{E}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{F}\\ \mathfrak{A}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\right) = Rg({}^{\circ}\mathfrak{M}_3\cdot\mathfrak{M}_4)\\ &= Rg\,\mathfrak{M}_4 - Rg\begin{pmatrix}{}^{\circ}\mathfrak{M}_3\\ {}^{\circ}\mathfrak{M}_4\end{pmatrix}^{\circ} = d_4 - d_{3\cap 4} = n-d-1-d_{3\cap 4}\end{aligned}\right.$$

[nach (I 4c), Satz 8 und (II 3f)]

(II 5b)
$$\left\{\begin{aligned} &Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{A}) = Rg\left((\mathfrak{O}, \ -\mathfrak{E}, \ \mathfrak{E})\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{F}\\ \mathfrak{A}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\right) = Rg\left({}^{\circ}\left(\begin{pmatrix}{}^{\circ}\mathfrak{M}_1\\ {}^{\circ}\mathfrak{M}_2\end{pmatrix}^{\circ}, \mathfrak{M}_3\right)\cdot\mathfrak{M}_4\right)\\ &= Rg\left(\begin{pmatrix}{}^{\circ}\mathfrak{M}_1\\ {}^{\circ}\mathfrak{M}_2\end{pmatrix}^{\circ}, \mathfrak{M}_3, \mathfrak{M}_4\right) - Rg\left(\begin{pmatrix}{}^{\circ}\mathfrak{M}_1\\ {}^{\circ}\mathfrak{M}_2\end{pmatrix}^{\circ}, \mathfrak{M}_3\right) = d_{(1\cap 2)\cup(3\cup 4)} - d_{(1\cap 2)\cup 3}\\ &= d_{1\cap 2} + d_3 + d_4 - d_{3\cap 4} - d_{(1\cap 2)\cap(3\cup 4)} - d_{(1\cap 2)\cup 3}\\ &= n-d-2-d_{3\cap 4} - d_{(1\cap 2)\cap(3\cup 4)} = Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{D}) - 1 - d_{(1\cap 2)\cap(3\cup 4)}\end{aligned}\right.$$

[nach Satz 8, (I 4b) und Satz 10].

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&1\\0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Die beiden ersten Konfigurationen stimmen in $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A})$, aber nicht in $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{D})$ überein, die beiden letzten in $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{D})$, aber nicht in $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A})$.

Nach (II 4c'') kann man mittels der Transformation (II 4b) mit $\mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{E}$ und einer geeigneten Matrix $\mathfrak{R}$ aus $\mathfrak{F}$ alle die Zeilen eliminieren, die Linearkombinationen aus den Zeilen von $\mathfrak{E} - \mathfrak{A}$ sind. Nach dieser Transformation ist also

(II 5c) $$Rg\,\mathfrak{F} = Rg(\mathfrak{E} - \mathfrak{D}) - Rg(\mathfrak{E} - \mathfrak{A}).$$

Man erhält nun folgende Sätze:

Satz 24. *Eine Konfiguration mit den Lagebeziehungen* (II 3a) *bis* (II 3d) *und* $\boldsymbol{V}_3 \cap \boldsymbol{V}_4 = \boldsymbol{V}^{(-1,n)}$ *besitzt in diesen Lagebeziehungen und* $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{D})$ *ein vollständiges Invariantensystem.*

Beweis. Zwei Konfigurationen der genannten Art lassen sich nach Satz 21 auf die Normalformen (II 4a) bzw. (II 4â) transformieren; aus $\boldsymbol{V}_3 \cap \boldsymbol{V}_4 = \boldsymbol{V}^{(-1,n)}$ folgt nach (II 5a) umkehrbar $Rg(\mathfrak{E} - \mathfrak{D}) = n - d$. Wegen $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{D}) = \boldsymbol{\Gamma}(\hat{\mathfrak{D}})$ ist $\begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{D}, & \mathfrak{A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}, & \mathfrak{R} \\ \mathfrak{V}, & \mathfrak{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}, & \mathfrak{R} \\ \mathfrak{V}, & \mathfrak{R} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \hat{\mathfrak{F}} \\ \mathfrak{D}, & \hat{\mathfrak{A}} \end{pmatrix}$, also $\begin{pmatrix} \mathfrak{D}, & -\mathfrak{F} \\ \mathfrak{D}, & \mathfrak{E} - \mathfrak{A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}, & \mathfrak{R} \\ \mathfrak{V}, & \mathfrak{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}, & \mathfrak{R} \\ \mathfrak{V}, & \mathfrak{R} \end{pmatrix} \times$ $\times \begin{pmatrix} \mathfrak{D}, & -\hat{\mathfrak{F}} \\ \mathfrak{D}, & \mathfrak{E} - \hat{\mathfrak{A}} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -\mathfrak{F} \\ \mathfrak{E} - \mathfrak{A} \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{V} = \begin{pmatrix} \mathfrak{D} \\ \mathfrak{D} \end{pmatrix}$. Infolge $Rg \begin{pmatrix} -\mathfrak{F} \\ \mathfrak{E} - \mathfrak{A} \end{pmatrix} = Rg(\mathfrak{E} - \mathfrak{D}) =$ $n - d$ ergibt sich daher $\mathfrak{V} = \mathfrak{D}$, d.h. $\boldsymbol{\Gamma}_v \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{D}, & \mathfrak{A} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Gamma}_v \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, & \hat{\mathfrak{F}} \\ \mathfrak{D}, & \hat{\mathfrak{A}} \end{pmatrix}$.

Satz 25. *Eine Konfiguration mit den Lagebeziehungen* (II 3a) *bis* (II 3d) *und* $(\boldsymbol{V}_1 \cap \boldsymbol{V}_2) \cap (\boldsymbol{V}_3 \cup \boldsymbol{V}_4) = \boldsymbol{V}^{(-1,n)}$ *besitzt in diesen Lagebeziehungen und* $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A})$ *ein vollständiges Invariantensystem.*

Beweis. Zwei Konfigurationen der genannten Art lassen sich nach Satz 21 auf die Normalformen (II 4a) bzw. (II 4â) transformieren; aus $(\boldsymbol{V}_1 \cap \boldsymbol{V}_2) \cap (\boldsymbol{V}_3 \cup \boldsymbol{V}_4) = \boldsymbol{V}^{(-1,n)}$ folgt nach (II 5b) umkehrbar $Rg(\mathfrak{E} - \mathfrak{A}) = Rg(\mathfrak{E} - \mathfrak{D})$, also nach (II 5c) $Rg\,\mathfrak{F} = 0$, d.h. $\mathfrak{F} = \hat{\mathfrak{F}} = \mathfrak{D}$. Wegen $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A}) = \boldsymbol{\Gamma}(\hat{\mathfrak{A}})$ ist $\hat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{R}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{R}$; die Transformation (II 4b) mit dieser Matrix $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{R} = \mathfrak{D}$ führt demnach schon (II 4a) in (II 4â) über.

Satz 26. *Eine Konfiguration mit den Lagebeziehungen* (II 3a) *bis* (II 3d) *und* $(\boldsymbol{V}_1 \cap \boldsymbol{V}_2) \cup (\boldsymbol{V}_3 \cup \boldsymbol{V}_4) = (\boldsymbol{V}_1 \cap \boldsymbol{V}_2) \cup \boldsymbol{V}_3$ *besitzt in diesen Lagebeziehungen und* $Rg(\mathfrak{E} - \mathfrak{D})$ *ein vollständiges Invariantensystem.*

Beweis. Zwei Konfigurationen der genannten Art lassen sich nach Satz 21 auf die Normalformen (II 4a) bzw. (II 4â) transformieren; aus

$$(\boldsymbol{V}_1 \cap \boldsymbol{V}_2) \cup (\boldsymbol{V}_3 \cup \boldsymbol{V}_4) = (\boldsymbol{V}_1 \cap \boldsymbol{V}_2) \cup \boldsymbol{V}_3$$

folgt nach (II 5b) umkehrbar $Rg(\mathfrak{E} - \mathfrak{A}) = 0$, also $\mathfrak{A} = \hat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{E}$ und nach (II 5c) $Rg\,\mathfrak{F} = Rg(\mathfrak{E} - \mathfrak{D}) = Rg(\mathfrak{E} - \hat{\mathfrak{D}}) = Rg\,\hat{\mathfrak{F}}$ und daraus $\hat{\mathfrak{F}} = \mathfrak{Q}^{-1} \cdot \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{R}$; die Transformation (II 4b) mit diesen Matrizen $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R} = \mathfrak{D}$ führt demnach schon (II 4a) in (II 4â) über.

Ergänzend zu diesen drei Sätzen ist noch folgendes zu bemerken: Die Lagebeziehung $(\boldsymbol{V}_1 \cap \boldsymbol{V}_2) \cup (\boldsymbol{V}_3 \cup \boldsymbol{V}_4) = \boldsymbol{V}^{(n,-1)}$ ist nach (II 5b) mit $Rg(\mathfrak{E} - \mathfrak{A}) = n - d$ äquivalent; wegen $Rg(\mathfrak{E} - \mathfrak{A}) \leq Rg(\mathfrak{E} - \mathfrak{D}) \leq n - d$ folgt daraus um-

kehrbar $Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{D})=n-d$ und $Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{A})=Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{D})$, d.h.

$$(\boldsymbol{V}_1\cap\boldsymbol{V}_2)\cup(\boldsymbol{V}_3\cup\boldsymbol{V}_4)=\boldsymbol{V}^{(n,\,n-1)}$$

ist äquivalent zu $\boldsymbol{V}_3\cap\boldsymbol{V}_4=\boldsymbol{V}^{(n-1,\,n)}$ und $(\boldsymbol{V}_1\cap\boldsymbol{V}_2)\cap(\boldsymbol{V}_3\cup\boldsymbol{V}_4)=\boldsymbol{V}^{(n-1,\,n)}$.

Die Lagebeziehung $\boldsymbol{V}_3=\boldsymbol{V}_4$ ist nach (II 5a) mit $Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{D})=0$ äquivalent; wegen $0\leqq Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{A})\leqq Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{D})$ folgt daraus umkehrbar $Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{A})=Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{D})$ und $Rg(\mathfrak{E}-\mathfrak{A})=0$, d.h. $\boldsymbol{V}_3=\boldsymbol{V}_4$ ist äquivalent zu $(\boldsymbol{V}_1\cap\boldsymbol{V}_2)\cap(\boldsymbol{V}_3\cup\boldsymbol{V}_4)=\boldsymbol{V}^{(n-1,\,n)}$ und $(\boldsymbol{V}_1\cap\boldsymbol{V}_2)\cup(\boldsymbol{V}_3\cup\boldsymbol{V}_4)=(\boldsymbol{V}_1\cap\boldsymbol{V}_2)\cup\boldsymbol{V}_3$.

Im Beweis des Satzes 25 wurde gezeigt, daß sich die Normalform (II 3g) zu

$$\left\{\begin{pmatrix}\mathfrak{E},\mathfrak{D}\\ \mathfrak{D},\mathfrak{E}\\ \mathfrak{D},\mathfrak{D}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{E},\mathfrak{D}\\ \mathfrak{D},\mathfrak{D}\\ \mathfrak{D},\mathfrak{E}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{D}\\ \mathfrak{E}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{D}\\ \mathfrak{A}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\right\}$$

spezialisieren läßt, wenn $(\boldsymbol{V}_1\cap\boldsymbol{V}_2)\cap(\boldsymbol{V}_3\cup\boldsymbol{V}_4)=\boldsymbol{V}^{(n-1,\,n)}$ ist. Diese Konfiguration ist ersichtlich zerlegbar in die $2\cdot d-n+1$ (nicht weiter interessierenden) Konfigurationen $\{\boldsymbol{1},\boldsymbol{1},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}\}$ und die Konfiguration

(II 5d)
$$\left\{\begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{D}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{D}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{A}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\right\}$$

die Gegenstand der weiteren Untersuchungen sein wird.

(II 6) *Die $\boldsymbol{Z}$-Invarianten der verallgemeinerten Doppelverhältnisse.* (II 6 1) *Zerlegung durch die quasi-*JORDANsche *Normalform.* Wird (II 3a) durch $\boldsymbol{V}_1\oplus\boldsymbol{V}_2=\boldsymbol{V}^{(n,\,n-1)}$ ersetzt, so tritt an die Stelle von (II 3f)

$$d_1=d_2=d_3=d_4=\frac{n-1}{2}$$

(n ist jetzt also notwendig ungerade) und an die Stelle von (II 3g) die unter (II 5d) schon genannte Konfiguration, die als Verallgemeinerung der Konfiguration aus vier Punkten auf einer Geraden oder der GRASSMANNschen Konfiguration aus vier Geraden im dreidimensionalen Raum aufzufassen ist. Nach Satz 18 und 19 ist $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A})=\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{B})=\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{C})=\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{D})$.

Die Matrizenklasse $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A})$ wird über einem kommutativen, algebraisch abgeschlossenen Körper bekanntlich eineindeutig durch ihre JORDANsche Normalform repräsentiert, aus der ihre Eigenwerte und die dazugehörigen Elementarteilerexponenten bzw. Rangdifferenzen zu ersehen sind[14]).

Das Theorem 3 in (III 1 3)[12]) besagt, daß $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A})$ auch über einem beliebigen Körper durch eine „quasi-JORDANsche Normalform" repräsentiert werden kann, wobei der Begriff „Eigenwert" auf Elemente des Zentrums $\boldsymbol{Z}$ von $\boldsymbol{K}$

[14]) An Stelle der sonst meist verwendeten Elementarteilerexponenten ε_k werden hier zweckmäßiger die Rangdifferenzen δ_g benutzt. Die ε_k und die δ_g bestimmen einander eineindeutig in folgender Weise: Setzt man für $\varphi(n)=\frac{n+|n|}{2\cdot n}$ fest: $\varphi(0)=1$, so ist $\varepsilon_k=\sum_g\varphi(\delta_g-k)$ und $\delta_g=\sum_k\varphi(\varepsilon_k-g)$. Die ε_k bilden die „SEGREsche", und die δ_g die „WEYRsche" Charakteristik des Eigenwerts.

eingeschränkt wird, und die Summe der Vielfachheiten dieser Eigenwerte kleiner als die Reihenzahl von $\mathfrak{A}$ und sogar Null sein kann. Die quasi-JORDANsche Normalform hat also im allgemeinen die Gestalt

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} \mathfrak{J}, \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, \mathfrak{U} \end{pmatrix},$$

wobei $\mathfrak{J}$ in ihrem Aufbau völlig der gewöhnlichen JORDANschen Normalform gleicht, während $\mathfrak{U}$ die „eigenwertfreie (bis auf Ähnlichkeit eindeutig bestimmte) Restmatrix" ist.

Demnach kann man (II 5 d) weiter in

(II 6 1a) $\left\{\begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{O}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{O}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{J}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\right\}$ und (II 6 1b) $\left\{\begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{O}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{O}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{U}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\right\}$

zerlegen; die Konfiguration (II 6 1b) besteht aus vier paarweise komplementären Mannigfaltigkeiten, weil $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{E} - \mathfrak{U}$ sicher invertierbar sind; weiteres läßt sich über sie nicht aussagen[15]). Die fernere Untersuchung beschränkt sich deshalb auf die Konfiguration (II 6 1a); das Ergebnis ist, zunächst ganz grob gesagt, daß $\mathfrak{J}$ die Lagebeziehung zwischen $\boldsymbol{V}_4$ und der von $\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2$ und $\boldsymbol{V}_3$ erzeugten SEGREschen Mannigfaltigkeit eineindeutig festlegt.

(II 6 2) *Die* SEGRE*sche Mannigfaltigkeit* $\boldsymbol{W}_{123}$. Obwohl die SEGREschen Mannigfaltigkeiten in der Literatur[16]) schon ausgiebig behandelt worden sind, sei hier eine kurze Repitition gestattet, um eine geeignete Bezeichnungsweise zu vereinbaren.

Aus den Mannigfaltigkeiten $\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2$ und $\boldsymbol{V}_3$ der Konfiguration (II 6 1a) kann man zwei neue, nichtlineare $\frac{n+1}{2}$-dimensionale Mannigfaltigkeiten ableiten: ($\mathfrak{J}$ sei jetzt $\frac{n+1}{2}$-reihig.)

1. Durch den Punkt $\begin{pmatrix}\mathfrak{x}\\ \mathfrak{v}\end{pmatrix} \in \boldsymbol{V}_1$ $(\mathfrak{x} \neq \mathfrak{v})$ verläuft genau eine Gerade $\boldsymbol{G}(\mathfrak{x})$, die auch $\boldsymbol{V}_2$ $\left(\text{in } \begin{pmatrix}\mathfrak{v}\\ \mathfrak{x}\end{pmatrix}\right)$ und $\boldsymbol{V}_3$ $\left(\text{in } \begin{pmatrix}\mathfrak{x}\\ \mathfrak{x}\end{pmatrix}\right)$ schneidet. Die Treffgeraden $\boldsymbol{G}(\mathfrak{x})$ bilden offenbar eine $\left(\frac{n-1}{2}\right)$-parametrige Schar und haben die Koordinatenmatrix $\begin{pmatrix}\mathfrak{x}, \mathfrak{v}\\ \mathfrak{v}, \mathfrak{x}\end{pmatrix}$. Ein beliebiger Punkt auf der Treffgeraden $\boldsymbol{G}(\mathfrak{x})$ wird daher durch

(II 6 2a) $$\begin{pmatrix}\mathfrak{x} \cdot \boldsymbol{u}\\ \mathfrak{x} \cdot \boldsymbol{r}\end{pmatrix}$$

angegeben. Die Menge aller Punkte (II 6 2a) ist die $\frac{n+1}{2}$-dimensionale Mannigfaltigkeit ${}_{\mathfrak{x}}\boldsymbol{W}_{123}$.

[15]) Es ist ein sehr reizvolles, aber wohl recht schwieriges Problem, ob sich notwendige und hinreichende Kriterien für die Ähnlichkeit von eigenwertfreien Matrizen angeben lassen.

[16]) Vgl. [*1*], S. 358.

2. $\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2$ und $\boldsymbol{V}_3$ gehören der einparametrigen Schar von $\frac{n-1}{2}$-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{a})$ an, deren Koordinatenmatrix $\begin{pmatrix}(\mathfrak{E}\cdot\boldsymbol{u})\\(\mathfrak{E}\cdot\boldsymbol{v})\end{pmatrix}$ ist, wobei $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ nicht gleichzeitig verschwinden dürfen, und $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}^{-1}$ im Falle $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ bzw. $\boldsymbol{a}=\infty$ im Falle $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ gesetzt wird. Offenbar ist $\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{V}(\infty)$, $\boldsymbol{V}_2=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{0})$ und $\boldsymbol{V}_3=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{1})$. Ein beliebiger Punkt auf $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{a})$ wird also durch

$$\text{(II 6 2b)}\qquad \begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\cdot\mathfrak{x}\\ \boldsymbol{v}\cdot\mathfrak{x}\end{pmatrix}$$

angegeben. Die Menge aller Punkte (II 6 2b) ist die $\frac{n+1}{2}$-dimensionale Mannigfaltigkeit ${}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{W}_{123}$.

Ist $n\geqq 3$, so sind ${}_{\mathfrak{x}}\boldsymbol{W}_{123}$ und ${}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{W}_{123}$ genau dann identisch, wenn der Koeffizientenkörper kommutativ ist. — Da die Eigenwerte von $\mathfrak{A}$, wie schon gesagt, in $\boldsymbol{Z}$ liegen [daher werden sie die $\boldsymbol{Z}$-Invarianten von $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A})$ genannt], können wir uns also jetzt auf $\boldsymbol{Z}$ als (kommutativen) Koeffizientenkörper beschränken. Dann ist ${}_{\mathfrak{x}}\boldsymbol{W}_{123}={}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{W}_{123}=\boldsymbol{W}_{123}$ die von $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$ und $\boldsymbol{V}_3$ erzeugte Segresche Mannigfaltigkeit im $\boldsymbol{P}_n(\boldsymbol{Z})$.

Über die $\boldsymbol{W}_{123}$ ist noch folgendes zu bemerken: Es ist genau dann $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{a}_1)\cap\boldsymbol{V}(\boldsymbol{a}_2)=\boldsymbol{V}^{(-1,n)}$, wenn $\boldsymbol{a}_1\neq\boldsymbol{a}_2$ ist; ebenso ist $\boldsymbol{G}(\mathfrak{x}_1)\cap\boldsymbol{G}(\mathfrak{x}_2)=\boldsymbol{V}^{(-1,n)}$ genau dann, wenn $Rg(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_2)=2$ ist. $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{a}_0)$ und $\boldsymbol{G}(\mathfrak{x}_0)$ schneiden sich stets in genau einem Punkt, nämlich in $\begin{pmatrix}\mathfrak{x}_0\cdot\boldsymbol{u}_0\\ \mathfrak{x}_0\cdot\boldsymbol{v}_0\end{pmatrix}\left(\begin{matrix}\boldsymbol{u}_0\\ \boldsymbol{v}_0\end{matrix}=\boldsymbol{a}_0\right)$; durch jeden Punkt $\begin{pmatrix}\mathfrak{x}_0\cdot\boldsymbol{a}_0\\ \mathfrak{x}_0\end{pmatrix}$ der $\boldsymbol{W}_{123}$ verläuft andererseits genau eine $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{a})$ und eine $\boldsymbol{G}(\mathfrak{x})$, und zwar die $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{a}_0)$ und die $\boldsymbol{G}(\mathfrak{x}_0)$.

Die vier Mannigfaltigkeiten $\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{V}(\infty)$, $\boldsymbol{V}_2=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{0})$, $\boldsymbol{V}_3=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{1})$ und $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{a})$ werden von einer $\boldsymbol{G}(\mathfrak{x})$ in den vier Punkten $\begin{pmatrix}\mathfrak{x}\\ 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\ \mathfrak{x}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\mathfrak{x}\\ \mathfrak{x}\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}\mathfrak{x}\cdot\boldsymbol{a}\\ \mathfrak{x}\end{pmatrix}$ geschnitten, die das gewöhnliche Doppelverhältnis $\boldsymbol{a}$ besitzen. — Daraus ist zu schließen: Bei einer Permutation von $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$ und $\boldsymbol{V}_3$ geht die $\boldsymbol{W}_{123}$ zwar offensichtlich in sich über, ihre $\boldsymbol{a}$-Skala unterliegt dabei jedoch den von den gewöhnlichen Doppelverhältnissen her bekannten Transformationen. Die Indizes in dem Symbol $\boldsymbol{W}_{123}$ geben also nicht nur die erzeugenden Mannigfaltigkeiten $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$ und $\boldsymbol{V}_3$ an, sondern legen durch ihre Reihenfolge auch die $\boldsymbol{a}$-Skala auf der $\boldsymbol{W}_{123}$ fest.

(II 6 3) *Die Lagebeziehung der $\boldsymbol{V}_4$ zur $\boldsymbol{W}_{123}$.* $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{Z}$ sei ein Eigenwert von $\mathfrak{F}$, $\delta_k=Rg(\mathfrak{F}-\boldsymbol{a}\cdot\mathfrak{E})^{k-1}-Rg(\mathfrak{F}-\boldsymbol{a}\cdot\mathfrak{E})^{k}$ die zu $\boldsymbol{a}$ gehörigen, mit wachsendem k monoton abnehmenden Rangdifferenzen; es gibt je δ_k linear unabhängige Hauptvektoren k. Stufe $\mathfrak{x}_1^{(k)},\ldots,\mathfrak{x}_{\delta_k}^{(k)}$, die die Gleichungen

$$(\mathfrak{F}-\boldsymbol{a}\cdot\mathfrak{E})\cdot\mathfrak{x}_i^{(k)}=\mathfrak{x}_i^{(k-1)}\qquad(i=1,\ldots,\delta_k;\ k=2,\ldots,e)$$

bzw.

$$(\mathfrak{F}-\boldsymbol{a}\cdot\mathfrak{E})\cdot\mathfrak{x}_i^{(1)}=0\qquad(i=1,\ldots,\delta_1)$$

erfüllen[17]). — Die $(\delta_k - 1)$-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten $\boldsymbol{V}^{(k)}(\boldsymbol{a})$ werden durch die kovarianten Koordinatenmatrizen

$$\left(\begin{pmatrix}\mathfrak{J}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\cdot(\mathfrak{J}-\boldsymbol{a}\cdot\mathfrak{E})^{k-1}\cdot(\mathfrak{x}_1^{(k)},\ldots,\mathfrak{x}_{\delta_k}^{(k)})\right)=\left(\begin{pmatrix}\mathfrak{J}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\cdot(\mathfrak{x}_1^{(1)},\ldots,\mathfrak{x}_{\delta_k}^{(1)})\right)=\begin{pmatrix}\mathfrak{x}_1^{(1)}\cdot\boldsymbol{a},\ldots,\mathfrak{x}_{\delta_k}^{(1)}\cdot\boldsymbol{a}\\ \mathfrak{x}_1^{(1)},\quad\ldots,\mathfrak{x}_{\delta_k}^{(1)}\end{pmatrix}$$

definiert. Offenbar ist

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{a})\supseteq\boldsymbol{V}^{(1)}(\boldsymbol{a})\supseteq\boldsymbol{V}^{(2)}(\boldsymbol{a})\supseteq\cdots\supseteq\boldsymbol{V}^{(e)}(\boldsymbol{a}).$$

Um unnötigen Komplikationen aus dem Wege zu gehen, wird bei dem nun folgenden Satz angenommen, daß $\boldsymbol{K}$ und damit auch sein Zentrum $\boldsymbol{Z}$ die Charakteristik 0 hat.

Satz 27. *$\boldsymbol{V}_4$ und die* SEGREsche *Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{W}_{123}$ schneiden sich in der $\boldsymbol{V}^{(1)}(\boldsymbol{a})$ und berühren sich in der $\boldsymbol{V}^{(k)}(\boldsymbol{a})$ von $(k-1)$. Ordnung.*

— Darunter ist folgendes zu verstehen: Ist $\boldsymbol{P}$ ein beliebiger Punkt der $\boldsymbol{V}^{(k)}(\boldsymbol{a})$, der jedoch nicht in der $\boldsymbol{V}^{(k+1)}(\boldsymbol{a})$ liegt, so gibt es mindestens ein Paar von Kurven, von denen die eine ganz in $\boldsymbol{V}_4$ und die andere ganz in $\boldsymbol{W}_{123}$ enthalten ist, die regulär durch $\boldsymbol{P}$ verlaufen und sich dort von $(k-1)$. Ordnung berühren; es gibt aber keine derartigen Kurven, die sich dort von höherer Ordnung berühren. —

Beweis. 1. Die in $\boldsymbol{V}_4$ gelegene Kurve

$$\text{(II 6 3a)}\qquad \begin{pmatrix}\mathfrak{J}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\cdot(\mathfrak{x}_i^{(1)}+\mathfrak{x}_i^{(2)}\cdot\boldsymbol{x}+\cdots+\mathfrak{x}_i^{(k)}\cdot\boldsymbol{x}^{k-1})\qquad i=1,\ldots,\delta_k$$

mit dem Kurvenparameter $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{Z}$ und die in $\boldsymbol{W}_{123}$ gelegene Kurve

$$\text{(II 6 3b)}\quad\begin{cases}\begin{pmatrix}\mathfrak{E}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{y})\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\cdot(\mathfrak{x}_i^{(1)}+\mathfrak{x}_i^{(2)}\cdot\boldsymbol{y}+\cdots+\mathfrak{x}_i^{(k)}\cdot\boldsymbol{y}^{k-1})\\ \qquad=\begin{pmatrix}\mathfrak{J}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\cdot(\mathfrak{x}_i^{(1)}+\mathfrak{x}_i^{(2)}\cdot\boldsymbol{y}+\cdots+\mathfrak{x}_i^{(k)}\cdot\boldsymbol{y}^{k-1})+\begin{pmatrix}\mathfrak{x}^{(k)}\cdot\boldsymbol{y}^k\\ 0\end{pmatrix}\end{cases}$$

mit dem Kurvenparameter $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{Z}$ verlaufen offensichtlich regulär durch $\begin{pmatrix}\mathfrak{x}_i^{(1)}\cdot\boldsymbol{a}\\ \mathfrak{x}_i^{(1)}\end{pmatrix}$ und berühren sich dort von $(k-1)$. Ordnung[18]).

2. Die allgemeinsten in $\boldsymbol{V}_4$ bzw. $\boldsymbol{W}_{123}$ gelegenen Kurven sind $\begin{pmatrix}\mathfrak{J}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\cdot\mathfrak{x}(\boldsymbol{x})$ bzw. $\begin{pmatrix}\mathfrak{E}\cdot f(\boldsymbol{y})\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\cdot\mathfrak{x}(\boldsymbol{y})$. Aus der Forderung, daß sie an der Stelle $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ bzw. $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ regulär sein und sich dort von mindestens $(k-1)$. Ordnung berühren sollen, ergibt sich im wesentlichen die oben angegebene Darstellung für sie.

Bei einer Permutation von $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$ und $\boldsymbol{V}_3$ ändert sich die eben beschriebene Lagebeziehung der $\boldsymbol{V}_4$ zur $\boldsymbol{W}_{123}$ nur insoweit, als $\boldsymbol{a}$ den von den gewöhnlichen Doppelverhältnissen her bekannten Transformationen unterliegt.

[17]) Vgl. Abschnitt (III 1).

[18]) Die Ableitungen werden rein formal gebildet, so daß der Ausdruck „Berührung" keine topologische Bedeutung zu besitzen braucht.

Das folgt einerseits aus dem letzten Absatz des Abschnitts (II 6 2), andererseits auch aus den Gleichungen

$$\text{(II 6 3c)} \qquad \begin{cases} \left((\mathfrak{E}-\mathfrak{J})-(\boldsymbol{1}-\boldsymbol{a})\cdot\mathfrak{E}\right)=-(\mathfrak{J}-\boldsymbol{a}\cdot\mathfrak{E}) & \text{und} \\ \left(\mathfrak{J}^{-1}-\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}}\cdot\mathfrak{E}\right)=-\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}}\cdot\mathfrak{J}^{-1}\cdot(\mathfrak{J}-\boldsymbol{a}\cdot\mathfrak{E}) \end{cases}$$

die besagen, daß sich die Eigenwerte bei den Permutationen der Mannigfaltigkeiten unter Erhaltung der zu ihnen gehörigen Rangdifferenzen genau so transformieren wie die Doppelverhältnismatrizen selbst. — Hiernach ist es nur noch nötig, das Verhalten der betrachteten Lagebeziehung gegenüber den Permutationen der KLEINschen Vierergruppe zu untersuchen:

Satz 28. *Besitzt $\mathfrak{J}$ nicht den Eigenwert $\boldsymbol{0}$ bzw. $\boldsymbol{1}$ bzw. weder $\boldsymbol{0}$ noch $\boldsymbol{1}$, so stimmt die Lagebeziehung der $\boldsymbol{V_4}$ zur $\boldsymbol{W_{123}}$ überein mit der der $\boldsymbol{V_3}$ zur $\boldsymbol{W_{214}}$ bzw. der $\boldsymbol{V_2}$ zur $\boldsymbol{W_{341}}$ bzw. der $\boldsymbol{V_1}$ zur $\boldsymbol{W_{432}}$.*

Beweis. Die Transformationen

$$\mathfrak{R}=\begin{pmatrix}\mathfrak{O}, & \mathfrak{J}\\ \mathfrak{E}, & \mathfrak{O}\end{pmatrix};\qquad \mathfrak{S}_2=\mathfrak{J}^{-1};\qquad \mathfrak{S}_4=\mathfrak{J}^{-1},$$

bzw.

$$\mathfrak{R}=\begin{pmatrix}\mathfrak{E}, & -\mathfrak{J}\\ \mathfrak{E}, & -\mathfrak{E}\end{pmatrix};\qquad \mathfrak{S}_2=-\mathfrak{E};\qquad \mathfrak{S}_3=(\mathfrak{E}-\mathfrak{J})^{-1};\qquad \mathfrak{S}_4=-(\mathfrak{E}-\mathfrak{J})^{-1},$$

bzw.

$$\mathfrak{R}=\begin{pmatrix}-\mathfrak{E}, & \mathfrak{E}\\ -\mathfrak{J}^{-1}, & \mathfrak{E}\end{pmatrix};\qquad \mathfrak{S}_1=-\mathfrak{J};\qquad \mathfrak{S}_3=\mathfrak{J}\cdot(\mathfrak{J}-\mathfrak{E})^{-1};\qquad \mathfrak{S}_4=(\mathfrak{E}-\mathfrak{J})^{-1}$$

führen

$$\left\{\begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{O}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{O}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{J}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\right\}\quad\text{in}\quad\left\{\begin{pmatrix}\mathfrak{O}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{O}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{J}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\right\}$$

bzw.

$$\left\{\begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{J}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{O}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{O}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\right\}\quad\text{bzw.}\quad\left\{\begin{pmatrix}\mathfrak{J}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{O}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{O}\end{pmatrix}\right\}$$

über.

Schließlich ist noch festzustellen:

Satz 29. *Die Lagebeziehung der $\boldsymbol{V_4}$ zur $\boldsymbol{W_{123}}$ ist in sich dual.*

Beweis. Offenbar ist

$$^{\circ}\begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{O}\end{pmatrix}\overset{s}{\sim}(\mathfrak{O},-\mathfrak{E});\quad ^{\circ}\begin{pmatrix}\mathfrak{O}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\overset{s}{\sim}(\mathfrak{E},\mathfrak{O});\quad ^{\circ}\begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\overset{s}{\sim}(\mathfrak{E},-\mathfrak{E})\quad\text{und}\quad ^{\circ}\begin{pmatrix}\mathfrak{J}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix}\overset{s}{\sim}(\mathfrak{E},-\mathfrak{J})$$

und $\begin{Bmatrix}(\mathfrak{O},-\mathfrak{E})\\ (\mathfrak{E},\ \mathfrak{O})\\ (\mathfrak{E},-\mathfrak{E})\\ (\mathfrak{E},-\mathfrak{J})\end{Bmatrix}$ geht durch $\mathfrak{R}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathfrak{O}, & \mathfrak{E}\\ -\mathfrak{E}, & \mathfrak{O}\end{pmatrix}$ in $\begin{Bmatrix}(\mathfrak{E},\mathfrak{O})\\ (\mathfrak{O},\mathfrak{E})\\ (\mathfrak{E},\mathfrak{E})\\ (\mathfrak{J},\mathfrak{E})\end{Bmatrix}$ über[19]).

[19]) Über einem kommutativen Körper sind transponierte Matrizen ähnlich: $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{J}')=\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{J})$.

(II 6 4) *Zusammenfallende Doppelverhältnisse.* Bei den nun folgenden Untersuchungen muß gegebenenfalls angenommen werden, daß $\boldsymbol{K}$ und damit auch sein Zentrum $\boldsymbol{Z}$ nicht die Charakteristik 2 hat, und daß $-\boldsymbol{3}$ in $\boldsymbol{Z}$ ein Quadrat ist[20]). — Es kann vorkommen, daß einige der bei den Permutationen der vier Mannigfaltigkeiten auftretenden sechs Doppelverhältnisse einander gleich sind, und zwar sind folgende acht Fälle zu unterscheiden[21]):

(II 6 4a) $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}^{-1}; \quad \mathfrak{J} = \mathfrak{E} - \mathfrak{J}; \quad \mathfrak{J} = \mathfrak{J} \cdot (\mathfrak{J} - \mathfrak{E})^{-1}; \quad \mathfrak{J} = (\mathfrak{E} - \mathfrak{J})^{-1}$

(II 6 4b) $\begin{cases} \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{J}) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{J}^{-1}); \quad \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{J}) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{E} - \mathfrak{J}); \quad \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{J}) = \boldsymbol{\Gamma}\big(\mathfrak{J} \cdot (\mathfrak{J} - \mathfrak{E})^{-1}\big); \\ \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{J}) = \boldsymbol{\Gamma}\big((\mathfrak{E} - \mathfrak{J})^{-1}\big). \end{cases}$

— Die Gln. (II 6 4a) gehen beziehentlich in

$$(\mathfrak{J} + \mathfrak{E}) \cdot (\mathfrak{J} - \mathfrak{E}) = \mathfrak{O}; \quad \mathfrak{J} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \cdot \mathfrak{E} = \mathfrak{O}; \quad (\mathfrak{J} - \boldsymbol{2} \cdot \mathfrak{E}) \cdot \mathfrak{J} = \mathfrak{O};$$

$$\Big(\mathfrak{J} - \frac{\boldsymbol{1} + \sqrt{-\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{2}} \cdot \mathfrak{E}\Big) \cdot \Big(\mathfrak{J} - \frac{\boldsymbol{1} - \sqrt{-\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{2}} \cdot \mathfrak{E}\Big) = \mathfrak{O}$$

über; das Minimalpolynom von $\mathfrak{J}$ ist also Teiler des jeweils linksstehenden Polynoms; demnach besitzt $\mathfrak{J}$ beziehentlich die schon als entsprechende gewöhnliche Doppelverhältnisse bekannten Eigenwerte

(II 6 4c) $$-\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}; \quad \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}; \quad \boldsymbol{2}, \boldsymbol{0}; \quad \frac{\boldsymbol{1} + \sqrt{-\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{2}}, \quad \frac{\boldsymbol{1} - \sqrt{-\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{2}},$$

und zwar ist der zu ihnen gehörende Minimalexponent höchstens 1[17]). — Die Gln. (II 6 4b) werden an Hand des ersten Falles gedeutet: Einerseits besitzen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}^{-1}$ die gleichen Eigenwerte, andererseits treten nach der an (II 6 3c) anknüpfenden Bemerkung in $\mathfrak{J}^{-1}$ die Eigenwerte $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}}$ mit den gleichen zugehörigen Rangdifferenzen auf wie die Eigenwerte $\boldsymbol{a}$ in $\mathfrak{J}$. Demnach kann $\mathfrak{J}$ die Eigenwertpaare $\boldsymbol{a}, \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}}$ mit jeweils übereinstimmenden zugehörigen Rangdifferenzen sowie die Eigenwerte $-\boldsymbol{1}$ oder $\boldsymbol{1}$ besitzen. In dieser Weise gehören zu

dem Fall	die Eigenwerte	und Eigenwertpaare (-tripel)
$\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{J}) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{J}^{-1})$	$-\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{a}, \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}}$
$\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{J}) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{E} - \mathfrak{J})$	$\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}$	$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{1} - \boldsymbol{a}$
$\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{J}) = \boldsymbol{\Gamma}\big(\mathfrak{J} \cdot (\mathfrak{J} - \mathfrak{E})^{-1}\big)$	$\boldsymbol{2}, \boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{a}, \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{1}}$
$\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{J}) = \boldsymbol{\Gamma}\big((\mathfrak{E} - \mathfrak{J})^{-1}\big)$	$\frac{\boldsymbol{1} + \sqrt{-\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{2}}, \frac{\boldsymbol{1} - \sqrt{-\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{2}}$	$\boldsymbol{a}, \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1} - \boldsymbol{a}}, \frac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}}$

Es gibt sogar Doppelverhältnisse, die gegenüber allen Permutationen der vier Mannigfaltigkeiten invariant sind; das ist offenbar der Fall, wenn $\mathfrak{J}$ die

[20]) Besonders interessant ist der Fall, daß $\boldsymbol{K}$ die Charakteristik 3 hat.

[21]) Aus $\mathfrak{J} = (\mathfrak{E} - \mathfrak{J})^{-1}$ folgt umkehrbar $\mathfrak{J} = \mathfrak{E} - \mathfrak{J}^{-1}$ und aus $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{J}) = \boldsymbol{\Gamma}((\mathfrak{E} - \mathfrak{J})^{-1})$ ebenso $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{J}) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{E} - \mathfrak{J}^{-1})$.

Eigenwertsextupel $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{1}-\boldsymbol{a}, \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}}, \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{1}}, \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1}-\boldsymbol{a}}, \frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}}$, das Eigenwerttripel $-\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}$ oder das Eigenwertpaar $\frac{\boldsymbol{1}+\sqrt{-\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{2}}, \frac{\boldsymbol{1}-\sqrt{-\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{2}}$ mit jeweils übereinstimmenden zugehörigen Rangdifferenzen aufweist[20]).

(II 7) Weisnersche *Doppelverhältnisse.* Weisner hat in [8] eine Verallgemeinerung des Doppelverhältnisses angegeben, die sich mit der hier dargestellten Verallgemeinerung ohne weiteres verbinden läßt; von einer näheren Ausführung wird jedoch aus Platzmangel, und weil dabei keine wesentlich neuen Ergebnisse gewonnen werden, abgesehen.

III. Ähnlichkeitstransformationen über nichtkommutativen Körpern.

(III 1) *Die quasi-*Jordansche *Normalform.* (III 1 1) *Eigenwerte im Zentrum eines nichtkommutativen Körpers.* Bekanntlich wird die Klasse $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A})$ der zu einer n-reihigen Matrix $\mathfrak{A}$ ähnlichen Matrizen $\widehat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{P}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{P}$ über einem kommutativen, algebraisch abgeschlossenen Körper eineindeutig durch die Jordansche Normalform repräsentiert, aus der ihre Eigenwerte und die zugehörigen Elementarteilerexponenten bzw. Rangdifferenzen[14]) zu ersehen sind. Bei dem Beweis dieses Theorems spielt die charakteristische Gleichung $|\mathfrak{A} - \boldsymbol{x} \cdot \mathfrak{E}| = \boldsymbol{0}$ eine grundlegende Rolle; zu der bei ihrer Aufstellung notwendigen Determinantenbildung wird die Kommutativität des Koeffizientenkörpers benutzt, und seine algebraische Abgeschlossenheit sichert die Existenz von n Lösungen. Will man das Theorem zunächst auf einen beliebigen kommutativen Körper übertragen, so muß man also gegebenenfalls auf eine vollständige Reduktion, d. h. darauf, daß die Summe der Vielfachheiten der Eigenwerte die Reihenzahl n von $\mathfrak{A}$ erreicht, verzichten. Die Kommutativität kann man vorerst ganz entbehren, indem man definiert, daß das Körperelement $\boldsymbol{a}$ ein Eigenwert von $\mathfrak{A}$ ist, wenn $(\mathfrak{A} - \boldsymbol{a} \cdot \mathfrak{E})$ nicht invertierbar ist; die so eingeführten Eigenwerte sind jedoch nur genau dann invariant gegenüber Ähnlichkeitstransformationen von $\mathfrak{A}$, wenn sie dem Zentrum $\boldsymbol{Z}$ von $\boldsymbol{K}$ angehören[22]), und daher wird der Begriff „Eigenwert" von vornherein auf Elemente von $\boldsymbol{Z}$ eingeschränkt. Eine Matrix, die in diesem Sinne keine Eigenwerte besitzt, wird „eigenwertfrei" genannt. Die Invarianz der Eigenwerte gegenüber Ähnlichkeitstransformationen von $\mathfrak{A}$ ist leicht einzusehen: Ist $P(\mathfrak{A})$ ein Polynom aus dem Polynomring $\boldsymbol{Z}[\mathfrak{A}]$, so gilt

$$\text{(III 1 1a)} \qquad P(\mathfrak{P}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{P}) = \mathfrak{P}^{-1} \cdot P(\mathfrak{A}) \cdot \mathfrak{P}$$

daraus folgt für $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{Z}$ und jede natürliche Zahl g:

$$\text{(III 1 1b)} \quad Rg\big((\mathfrak{P}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{P} - \boldsymbol{a} \cdot \mathfrak{E})^g\big) = Rg\big(\mathfrak{P}^{-1} \cdot (\mathfrak{A} - \boldsymbol{a} \cdot \mathfrak{E})^g \cdot \mathfrak{P}\big) = Rg\big((\mathfrak{A} - \boldsymbol{a} \cdot \mathfrak{E})^g\big).$$

[22]) Ist $\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{Z}$, so gibt es mindestens ein $\boldsymbol{b}$ derart, daß $\boldsymbol{b}^{-1} \cdot \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{a}$ ist. Setzt man $\mathfrak{P} = \boldsymbol{b} \cdot \mathfrak{E}$, und $\widehat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{P}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{P} = \boldsymbol{b}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \boldsymbol{b}$, so ist $\widehat{\mathfrak{A}} - \boldsymbol{c} \cdot \mathfrak{E} = \mathfrak{P}^{-1} \cdot (\mathfrak{A} - \boldsymbol{a} \cdot \mathfrak{E}) \cdot \mathfrak{P}$. Ist nun $\boldsymbol{a}$ ein „Eigenwert" von $\mathfrak{A}$, so geht es also in den von ihm verschiedenen „Eigenwert" $\boldsymbol{c}$ der zu $\mathfrak{A}$ ähnlichen Matrix $\widehat{\mathfrak{A}}$ über.

Diese Gleichung sichert nicht nur die Invarianz der Eigenwerte $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{Z}$ von $\mathfrak{A}$, sondern auch die der zugehörigen „Rangdefekte" $n - Rg\left((\mathfrak{A} - \boldsymbol{a} \cdot \mathfrak{E})^g\right)$ und „Rangdifferenzen" $Rg\left((\mathfrak{A} - \boldsymbol{a} \cdot \mathfrak{E})^{g-1}\right) - Rg\left((\mathfrak{A} - \boldsymbol{a} \cdot \mathfrak{E})^g\right)$ gegenüber den Ähnlichkeitstransformationen von $\mathfrak{A}$.

(III 12) Einige Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *$\mathfrak{X}$ sei eine n-reihige Matrix; mit wachsendem g nehmen die Rangdefekte $n - Rg\,\mathfrak{X}^g$ monoton zu, und die Rangdifferenzen $Rg\,\mathfrak{X}^{g-1} - Rg\,\mathfrak{X}^g$ nehmen monoton ab:*

(III 1 2a) $\qquad Rg\,\mathfrak{X}^g \leqq Rg\,\mathfrak{X}^{g-1} \quad$ *bzw.* $\quad n - Rg\,\mathfrak{X}^g \geqq n - Rg\,\mathfrak{X}^{g-1}.$

(III 1 2b) $\qquad Rg\,\mathfrak{X}^g - Rg\,\mathfrak{X}^{g+1} \leqq Rg\,\mathfrak{X}^{g-1} - Rg\,\mathfrak{X}^g.$

Beweis. 1. (III 1 2a) folgt unmittelbar aus Satz 11. —

2. $\mathfrak{X}^g$ erzeuge rechtsseitig den Unterraum $\boldsymbol{X}_g \subseteq \boldsymbol{E}: \mathfrak{X}^g \xrightarrow{d} \boldsymbol{X}_g$. Aus $\mathfrak{X}^g = \mathfrak{X}^{g-1} \cdot \mathfrak{X}$ folgt nach Satz 1: $\boldsymbol{X}_g \subseteq \boldsymbol{X}_{g-1}$ [vgl. mit (III 1 2a)]. Demnach existieren Unterräume $\boldsymbol{Y}_g \subseteq \boldsymbol{E}$, so daß gilt: $\boldsymbol{X}_g \oplus \boldsymbol{Y}_g = \boldsymbol{X}_{g-1}$. Eine rechtsseitig erzeugende Matrix von $\boldsymbol{Y}_g$ sei $\mathfrak{Y}_g$: $\mathfrak{Y}_g \xrightarrow{d} \boldsymbol{Y}_g$. Es folgt:

(III 1 2c) $\quad Rg\,\mathfrak{Y}_g = Rg\,\mathfrak{X}^{g-1} - Rg\,\mathfrak{X}^g \quad$ und (III 1 2d) $\quad (\mathfrak{X}^g, \mathfrak{Y}_g) \overset{d}{\sim} \mathfrak{X}^{g-1}.$

Nach Multiplikation mit $\mathfrak{X}$ von links ergibt (III 1 2d): $(\mathfrak{X}^{g+1}, \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y}_g) \overset{d}{\sim} \mathfrak{X}^g$. Daraus schließt man: $Rg\,\mathfrak{X}^g \leqq Rg\,\mathfrak{X}^{g+1} + Rg\,(\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y}_g)$ und erhält mit (III 1 2c) die Ungleichung (III 1 2b):

$$Rg\,\mathfrak{X}^g - Rg\,\mathfrak{X}^{g+1} \leqq Rg\,(\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y}_g) \leqq Rg\,\mathfrak{Y}_g = Rg\,\mathfrak{X}^{g-1} - Rg\,\mathfrak{X}^g.$$

Ist $\boldsymbol{a}$ ein Eigenwert von $\mathfrak{A}$, so existiert nach Hilfssatz 1 eine kleinste natürliche Zahl e derart, daß für jede natürliche Zahl g gilt: $Rg\left((\mathfrak{A} - \boldsymbol{a} \cdot \mathfrak{E})^{e+g}\right) = Rg\left((\mathfrak{A} - \boldsymbol{a} \cdot \mathfrak{E})^e\right)$. Diese Zahl e ist nach (III 1 1b) gegenüber Ähnlichkeitstransformationen von $\mathfrak{A}$ invariant, und wird der zu $\boldsymbol{a}$ gehörige „Minimalexponent"[23] genannt; der Rangdefekt $p = n - Rg\left((\mathfrak{A} - \boldsymbol{a} \cdot \mathfrak{E})^e\right)$ heißt die „Vielfachheit"[24] von $\boldsymbol{a}$. — $\mathfrak{x}^{(k)}$ ist ein zu $\boldsymbol{a}$ gehöriger „Hauptvektor k. Stufe", wenn

$$(\mathfrak{A} - \boldsymbol{a} \cdot \mathfrak{E})^k \cdot \mathfrak{x}^{(k)} = \mathfrak{o}, \quad \text{aber} \quad (\mathfrak{A} - \boldsymbol{a} \cdot \mathfrak{E})^{k-1} \cdot \mathfrak{x}^{(k)} \neq \mathfrak{o}$$

ist. Es gibt offenbar $\delta_k = Rg\left((\mathfrak{A} - \boldsymbol{a} \cdot \mathfrak{E})^{k-1}\right) - Rg\left((\mathfrak{A} - \boldsymbol{a} \cdot \mathfrak{E})^k\right)$ linear unabhängige Hauptvektoren k. Stufe $\mathfrak{x}_1^{(k)}, \ldots, \mathfrak{x}_{\delta_k}^{(k)}$ derart, daß jede echte Linearkombination aus ihnen ebenfalls ein Hauptvektor k. Stufe ist. Die Vektoren

$$(\mathfrak{A} - \boldsymbol{a} \cdot \mathfrak{E}) \cdot \mathfrak{x}_1^{(k)}, \ldots, (\mathfrak{A} - \boldsymbol{a} \cdot \mathfrak{E}) \cdot \mathfrak{x}_{\delta_k}^{(k)}$$

sind daher wiederum linear unabhängige Hauptvektoren $(k-1)$. Stufe. Von den Hauptvektoren der höchsten Stufe e ausgehend, können also die sämt-

[23]) e entspricht dem höchsten zu $\boldsymbol{a}$ gehörigen Elementarteilerexponenten in der sonst üblichen Darstellungsweise und hat hier, wie Hilfssatz 3 zeigt, eine analoge Bedeutung.

[24]) p stimmt mit der Vielfachheit von $\boldsymbol{a}$ in der sonst üblichen Darstellungsweise überein.

lichen zu $\boldsymbol{a}$ gehörigen Hauptvektoren

$$\text{(III 1 2e)} \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{x}_1^{(e)} & \cdots & \mathfrak{x}_{\delta_e}^{(e)} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{x}_1^{(k)} & \cdots\cdots & \mathfrak{x}_{\delta_k}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{x}_1^{(1)} & \cdots\cdots\cdots & \mathfrak{x}_{\delta_1}^{(1)} \end{array} \right.$$

so gewählt werden, daß stets gilt:

$$\text{(III 1 2f)} \qquad \begin{cases} (\mathfrak{A} - \boldsymbol{a} \cdot \mathfrak{E}) \cdot \mathfrak{x}_i^{(k)} = \mathfrak{x}_i^{(k-1)} & (i = 1, \ldots, \delta_k;\ k = 2, \ldots, e) \\ (\mathfrak{A} - \boldsymbol{a} \cdot \mathfrak{E}) \cdot \mathfrak{x}_i^{(1)} = \mathfrak{o} & (i = 1, \ldots, \delta_1). \end{cases}$$

Die Hauptvektoren 1. Stufe $\mathfrak{x}_i^{(1)}$ heißen auch „Eigenvektoren". — Aus den Gln. (III 1 2f) entnimmt man für $P(\mathfrak{A}) \in \boldsymbol{Z}[\mathfrak{A}]$[25]:

$$\text{(III 1 2g)} \qquad P(\mathfrak{A}) \cdot \mathfrak{x}_i^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{P^{(\nu)}(\boldsymbol{a})}{\nu!} \cdot \mathfrak{x}_i^{(k-\nu)}$$

— Alle zu $\boldsymbol{a}$ gehörigen Hauptvektoren spannen den zu $\boldsymbol{a}$ gehörigen „Hauptraum" $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}) \subseteq \boldsymbol{E}$ auf[26]:

$$(\mathfrak{A} - \boldsymbol{a} \cdot \mathfrak{E})^e \cdot \mathfrak{x}_i^{(k)} = \mathfrak{o}; \qquad (i = 1, \ldots, \delta_k;\ k = 1, \ldots, e)$$

$$\left((\mathfrak{A} - \boldsymbol{a} \cdot \mathfrak{E})^e\right)^{\circ} \xrightarrow{d} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}); \qquad dim\, \boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}) = n - Rg\left((\mathfrak{A} - \boldsymbol{a} \cdot \mathfrak{E})^e\right) = p.$$

Hilfssatz 2. *$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ seien verschiedene Eigenwerte von $\mathfrak{A}$; die zugehörigen Minimalexponenten, Vielfachheiten und Hauptträume seien beziehentlich $e_1, \ldots, e_r$ und $p_1, \ldots, p_r$ sowie $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}_1), \ldots, \boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}_r)$. Keiner von diesen Hauptträumen schneidet die Verbindung der anderen; es ist also z. B.*

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}_1) \cap \left(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}_2) \cup \cdots \cup \boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}_r)\right) = \boldsymbol{O}.$$

Beweis. Aus

$$\mathfrak{x} \in \boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}_1) \cap \left(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}_2) \cup \cdots \cup \boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}_r)\right) \text{ folgt } \mathfrak{x} \in \left(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}_2) \cup \cdots \cup \boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}_r)\right),$$

also

$$\text{(III 1 2h)} \qquad (\mathfrak{A} - \boldsymbol{a}_2 \cdot \mathfrak{E})^{e_2} \cdot \ \ldots\ \cdot (\mathfrak{A} - \boldsymbol{a}_r \cdot \mathfrak{E})^{e_r} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$$

andererseits ist $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}_1)$; da kein Hauptvektor Linearkombination von Hauptvektoren niederer Stufe ist, ergibt sich aus (III 1 2h) und (III 1 2g) wegen $(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2)^{e_2} \cdot \ldots \cdot (\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_r)^{e_r} \neq \boldsymbol{0}$ leicht $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$.

$\mathfrak{A}$ besitzt demnach höchstens n verschiedene Eigenwerte, weil $p_1 + \cdots + p_r = dim\left(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}_1) \cup \cdots \cup \boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}_r)\right) \leq n$ ist. Daher kann man annehmen, daß $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ bereits alle Eigenwerte von $\mathfrak{A}$ sind. — Der $(p_1 + \cdots + p_r)$-dimensionale Unterraum $\boldsymbol{M}(\mathfrak{A}) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}_1) \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}_r)$ heißt der „Maximalraum" von $\mathfrak{A}$. Ferner wird $M(\mathfrak{A}) = (\mathfrak{A} - \boldsymbol{a}_1 \cdot \mathfrak{E})^{e_1} \cdot \ldots \cdot (\mathfrak{A} - \boldsymbol{a}_r \cdot \mathfrak{E})^{e_r}$ das „Minimalpolynom" von $\mathfrak{A}$

[25]) Diese Schreibweise ist bei Zulassung eines Körpers von Primzahlcharakteristik zwar lax, ist aber noch vertretbar, weil die Ableitung $P^{(\nu)}(\boldsymbol{a})$ stets den Faktor $\nu!$ enthält. Übrigens interessiert bei der Anwendung dieser Formel nur das erste Glied $P(\boldsymbol{a}) \cdot \mathfrak{x}_i^{(k)}$.

[26]) Das Zeichen $^{\circ}$ wird im folgenden nur in der unter (I 4) definierten Bedeutung, nicht als Exponent gebraucht.

genannt. — Über diese Bezeichnungen sowie die Beziehung zwischen dem Maximalraum und dem Minimalpolynom erhält man Aufschluß durch den

Hilfssatz 3. *Das Polynom* $P(\mathfrak{A}) \in \boldsymbol{Z}[\mathfrak{A}]$ *sei über* $\boldsymbol{Z}$ *vollständig* (in Linearfaktoren) *zerlegbar; dann gilt* $(P(\mathfrak{A}))^{\circ} \xrightarrow{d} \overline{\boldsymbol{M}} \subseteq \boldsymbol{M}(\mathfrak{A})$ *und es ist genau dann* $\overline{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M}(\mathfrak{A})$, *wenn das Minimalpolynom* $M(\mathfrak{A})$ *Teiler von* $P(\mathfrak{A})$ *ist.* — $\boldsymbol{M}(\mathfrak{A})$ ist also der größte Unterraum aus $\boldsymbol{E}$, dessen Vektoren zu den Zeilen eines über $\boldsymbol{Z}$ vollständig zerlegbaren Polynoms von $\mathfrak{A}$ konträr sind, und $M(\mathfrak{A})$ ist das über $\boldsymbol{Z}$ vollständig zerlegbare Polynom niedrigsten Grades, dessen Zeilen zu allen Vektoren aus $\boldsymbol{M}(\mathfrak{A})$ konträr sind. —

Beweis. Es sei

$$P(\mathfrak{A}) = \boldsymbol{c} \cdot (\mathfrak{A} - \boldsymbol{b}_1 \cdot \mathfrak{E})^{g_1} \cdot \ldots \cdot (\mathfrak{A} - \boldsymbol{b}_t \cdot \mathfrak{E})^{g_t} \cdot (\mathfrak{A} - \boldsymbol{a}_1 \cdot \mathfrak{E})^{f_1} \cdot \ldots \cdot (\mathfrak{A} - \boldsymbol{a}_r \cdot \mathfrak{E})^{f_r}$$
$$(\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{Z};\ \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{o}),$$

wobei $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_t \in \boldsymbol{Z}$ keine Eigenwerte von $\mathfrak{A}$ sein sollen. Die Unterräume $\overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_1), \ldots, \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_r)$ werden eingeführt durch

$$\left((\mathfrak{A} - \boldsymbol{a}_1 \cdot \mathfrak{E})^{f_1}\right)^{\circ} \xrightarrow{d} \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_1) \subseteq \boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}_1), \ldots, \left((\mathfrak{A} - \boldsymbol{a}_r \cdot \mathfrak{E})^{f_r}\right)^{\circ} \xrightarrow{d} \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_r) \subseteq \boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}_r).$$

Offenbar ist genau dann $\overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_\varrho) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}_\varrho)$, wenn $f_\varrho \geqq e_\varrho$ ist. — Jeder Vektor $\mathfrak{x} \in \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_1) \cup \cdots \cup \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_r)$ erfüllt die Gleichung $P(\mathfrak{A}) \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{v}$, d. h. $\left((\overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_1) \cup \cdots \cup \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_r)\right)$ ist in dem von $(P(\mathfrak{A}))^{\circ}$ rechtsseitig erzeugten Unterraum $\overline{\boldsymbol{M}}$ enthalten: $\left(\overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_1) \cup \cdots \cup \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_r)\right) \subseteq \overline{\boldsymbol{M}}$, und es gilt unter Benutzung von Hilfssatz 2:

$$Rg\left(P(\mathfrak{A})\right) = n - dim\ \overline{\boldsymbol{M}} \leq n - \left(dim\ \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_1) + \cdots + dim\ \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_r)\right).$$

Andererseits folgt aus Satz 11 durch vollständige Induktion

$$\begin{aligned} Rg\left(P(\mathfrak{A})\right) &= Rg\left((\mathfrak{A} - \boldsymbol{a}_1 \cdot \mathfrak{E})^{f_1} \cdot \ldots \cdot (\mathfrak{A} - \boldsymbol{a}_r \cdot \mathfrak{E})^{f_r}\right) \\ &\geqq Rg\left((\mathfrak{A} - \boldsymbol{a}_1 \cdot \mathfrak{E})^{f_1}\right) + \cdots + Rg\left((\mathfrak{A} - \boldsymbol{a}_r \cdot \mathfrak{E})^{f_r}\right) - (r-1) \cdot n \\ &= n - \left(dim\ \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_1) + \cdots + dim\ \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_r)\right) \end{aligned}$$

Demnach ist

$$Rg\left(P(\mathfrak{A})\right) = n - \left(dim\ \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_1) + \cdots + dim\ \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_r)\right)$$

und

$$\overline{\boldsymbol{M}} = \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_1) \oplus \cdots \oplus \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{a}_r) \subseteq \boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}_1) \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}_r) = \boldsymbol{M}(\mathfrak{A}).$$

(III 1 3) *Existenzbeweis der quasi-*JORDANschen *Normalform.*

Theorem 3. *Eine n-reihige Matrix* $\mathfrak{A}$ *über einem nichtkommutativen Körper* $\boldsymbol{K}$ *wird durch eine geeignete Ähnlichkeitstransformation in*

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \mathfrak{J}, & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{U} \end{pmatrix}$$

übergeführt; dabei ist $\mathfrak{J}$ *eine* $(p_1 + \cdots + p_r)$*-reihige* JORDANsche *Normalform, aus der die Eigenwerte* $\boldsymbol{a}_\varrho \in \boldsymbol{Z}$ *von* $\mathfrak{A}$ *nebst zugehörigen Rangdifferenzen bzw. Elementarteilerexponenten ersichtlich sind. Die* $(n - (p_1 + \cdots + p_r))$*-reihige Matrix* $\mathfrak{U}$ *ist eigenwertfrei und bis auf Ähnlichkeit eindeutig bestimmt*[27]).

[27]) Das Theorem 3 kann auch aus [5] hergeleitet werden; jedoch scheint DIEUDONNÉ diese Umformung seiner Ergebnisse nicht beabsichtigt zu haben. Es gilt natürlich auch in einem kommutativen, algebraisch abgeschlossenen Körper und reduziert sich dort auf die Behauptung der Existenz der gewöhnlichen JORDANschen Normalform, weil es dort keine eigenwertfreien Matrizen gibt.

Beweis. 1. Eine n-reihige Matrix $\mathfrak{P}$ wird in folgender Weise konstruiert: ihre $(p_1+\cdots+p_r)$ ersten Spalten seien die sämtlichen, nach Hilfssatz 2 linear unabhängigen Hauptvektoren von $\mathfrak{A}$, in der üblichen Weise[28]) geordnet; die restlichen Spalten werden so gewählt, daß $\mathfrak{P}$ invertierbar ist. Dann ergibt sich zunächst:

$$\mathfrak{P}^{-1}\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{P}=\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\mathfrak{X}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{U}\end{pmatrix}.$$

2. Angenommen, $\mathfrak{U}$ besäße Eigenwerte; dann gibt es nach dem eben Bewiesenen eine $(n-(p_1+\cdots+p_r))$-reihige invertierbare Matrix $\mathfrak{R}$ derart, daß

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{E},\mathfrak{O}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{R}^{-1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\mathfrak{X}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{U}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{E},\mathfrak{O}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{R}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2\\ \mathfrak{O},\overline{\mathfrak{J}},\mathfrak{X}_3\\ \mathfrak{O},\mathfrak{O},\overline{\mathfrak{U}}\end{pmatrix}$$

wird, wobei $\overline{\mathfrak{J}}$ die zu $\mathfrak{U}$ gehörige JORDANsche Normalform darstellt. Ist $\overline{M}(\mathfrak{U})$ das Minimalpolynom von $\mathfrak{U}$, so ist

$$M\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2\\ \mathfrak{O},\overline{\mathfrak{J}},\mathfrak{X}_3\\ \mathfrak{O},\mathfrak{O},\overline{\mathfrak{U}}\end{pmatrix}\cdot\overline{M}\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2\\ \mathfrak{O},\overline{\mathfrak{J}},\mathfrak{X}_3\\ \mathfrak{O},\mathfrak{O},\overline{\mathfrak{U}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathfrak{O},\mathfrak{Y}_1,\mathfrak{Y}_2\\ \mathfrak{O},M(\overline{\mathfrak{J}}),\mathfrak{Y}_3\\ \mathfrak{O},\mathfrak{O},M(\overline{\mathfrak{U}})\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\overline{M}(\mathfrak{J}),\mathfrak{Z}_1,\mathfrak{Z}_2\\ \mathfrak{O},\mathfrak{O},\mathfrak{Z}_3\\ \mathfrak{O},\mathfrak{O},\overline{M}(\overline{\mathfrak{U}})\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mathfrak{O},\mathfrak{O},\mathfrak{Y}_1\cdot\mathfrak{Z}_3+\mathfrak{Y}_2\cdot\overline{M}(\overline{\mathfrak{U}})\\ \mathfrak{O},\mathfrak{O},M(\overline{\mathfrak{J}})\cdot\mathfrak{Z}_3+\mathfrak{Y}_3\cdot\overline{M}(\overline{\mathfrak{U}})\\ \mathfrak{O},\mathfrak{O},M(\overline{\mathfrak{U}})\cdot\overline{M}(\overline{\mathfrak{U}})\end{pmatrix}$$

im Widerspruch zu Hilfssatz 3, wonach kein über $\boldsymbol{Z}$ vollständig reduzibles Polynom aus $\boldsymbol{Z}[\mathfrak{A}]$ einen kleineren Rang als $M(\mathfrak{A})$ besitzt. $\mathfrak{U}$ ist daher eigenwertfrei.

3. Sind die n-reihigen Matrizen $\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\mathfrak{X}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{U}\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\overline{\mathfrak{X}}\\ \mathfrak{O},\overline{\mathfrak{U}}\end{pmatrix}$ ähnlich, so existiert eine n-reihige invertierbare Matrix $\begin{pmatrix}\mathfrak{Q},\mathfrak{N}\\ \mathfrak{V},\mathfrak{R}\end{pmatrix}$, so daß

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\mathfrak{X}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{U}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{Q},\mathfrak{N}\\ \mathfrak{V},\mathfrak{R}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathfrak{Q},\mathfrak{N}\\ \mathfrak{V},\mathfrak{R}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\overline{\mathfrak{X}}\\ \mathfrak{O},\overline{\mathfrak{U}}\end{pmatrix}$$

also nach (III 1 1a) auch

$$\left(M\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\mathfrak{X}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{U}\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{Q},\mathfrak{N}\\ \mathfrak{V},\mathfrak{R}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathfrak{Q},\mathfrak{N}\\ \mathfrak{V},\mathfrak{R}\end{pmatrix}\cdot\left(M\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\overline{\mathfrak{X}}\\ \mathfrak{O},\overline{\mathfrak{U}}\end{pmatrix}\right),$$

d. h.

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{O},&\mathfrak{Y}\\ \mathfrak{O},M(\mathfrak{U})\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{Q},\mathfrak{N}\\ \mathfrak{V},\mathfrak{R}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathfrak{Q},\mathfrak{N}\\ \mathfrak{V},\mathfrak{R}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{O},&\overline{\mathfrak{Y}}\\ \mathfrak{O},M(\overline{\mathfrak{U}})\end{pmatrix}$$

[28]) Unter den Eigenwerten wird eine beliebige Reihenfolge festgelegt. Die zu einem Eigenwert gehörigen Hauptvektoren werden in der Reihenfolge $\mathfrak{x}_1^{(1)}\ldots\mathfrak{x}_1^{(e)};\ \mathfrak{x}_2^{(1)},\mathfrak{x}_2^{(2)}\ldots;\ \mathfrak{x}_3^{(1)}\ldots$ angeordnet [vgl. (III 1 2e) und (III 1 2f)].

gilt. Daraus folgt $M(\mathfrak{U})\cdot\mathfrak{V}=\mathfrak{O}$; $M(\mathfrak{U})$ ist invertierbar, weil $\mathfrak{U}$ als eigenwertfrei bekannt ist; infolgedessen ist $\mathfrak{V}=\mathfrak{O}$,

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\overline{\mathfrak{X}}\\ \mathfrak{O},\overline{\mathfrak{U}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathfrak{Q}^{-1}, & -\mathfrak{Q}^{-1}\cdot\mathfrak{N}\cdot\mathfrak{R}^{-1}\\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{R}^{-1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\mathfrak{X}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{U}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{Q},\mathfrak{N}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{R}\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad\overline{\mathfrak{U}}=\mathfrak{R}^{-1}\cdot\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{R}.$$

4. $\mathfrak{J}_\varrho$ seien die zu den Eigenwerten $\boldsymbol{a}_\varrho$ von $\mathfrak{A}$ gehörigen Teilmatrizen von $\mathfrak{J}$. Analog wird $\mathfrak{X}$ aufgegliedert[29]):

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{J},\mathfrak{X}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{U}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathfrak{J}_1 & & \mathfrak{X}_1\\ & \ddots & \vdots\\ & & \mathfrak{J}_r,\mathfrak{X}_r\\ & & \mathfrak{U}\end{pmatrix}.$$

Mit den noch näher zu bestimmenden Teilmatrizen $\mathfrak{N}_1,\ldots,\mathfrak{N}_r$ wird die Ähnlichkeitstransformation

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{E} & & -\mathfrak{N}_1\\ & \ddots & \vdots\\ & \mathfrak{E}, & -\mathfrak{N}_r\\ & & \mathfrak{E}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{J}_1 & & \mathfrak{X}_1\\ & \ddots & \vdots\\ & & \mathfrak{J}_r,\mathfrak{X}_r\\ & & \mathfrak{U}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathfrak{E} & & \mathfrak{N}_1\\ & \ddots & \vdots\\ & \mathfrak{E}, & \mathfrak{N}_r\\ & & \mathfrak{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathfrak{J}_1 & & \mathfrak{X}_1+\mathfrak{J}_1\cdot\mathfrak{N}_1-\mathfrak{N}_1\cdot\mathfrak{U}\\ & \ddots & \\ & & \mathfrak{J}_r,\mathfrak{X}_r+\mathfrak{J}_r\cdot\mathfrak{N}_r-\mathfrak{N}_r\cdot\mathfrak{U}\\ & & \mathfrak{U}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mathfrak{J}_1 & & \mathfrak{X}_1^{(1)}\\ & \ddots & \\ & & \mathfrak{J}_r,\mathfrak{X}_r^{(1)}\\ & & \mathfrak{U}\end{pmatrix}$$

durchgeführt. Wegen $\boldsymbol{a}_\varrho\in\boldsymbol{Z}$ ist offenbar

$$\mathfrak{X}_\varrho^{(1)}=\mathfrak{X}_\varrho+(\mathfrak{J}_\varrho-\boldsymbol{a}_\varrho\cdot\mathfrak{E})\cdot\mathfrak{N}_\varrho-\mathfrak{N}_\varrho\cdot(\mathfrak{U}-\boldsymbol{a}_\varrho\cdot\mathfrak{E}).$$

$\mathfrak{U}-\boldsymbol{a}_\varrho\cdot\mathfrak{E}$ ist invertierbar, weil $\mathfrak{U}$ eigenwertfrei ist; daher kann $\mathfrak{N}_\varrho=\mathfrak{X}_\varrho\cdot(\mathfrak{U}-\boldsymbol{a}_\varrho\cdot\mathfrak{E})^{-1}$ gewählt werden, so daß

$$\mathfrak{X}_\varrho^{(1)}=(\mathfrak{J}_\varrho-\boldsymbol{a}_\varrho\cdot\mathfrak{E})\cdot\mathfrak{X}_\varrho\cdot(\mathfrak{U}-\boldsymbol{a}_\varrho\cdot\mathfrak{E})^{-1}$$

wird. Durch g-fache Iteration dieses Prozesses gelangt man zu

$$\mathfrak{X}_\varrho^{(g)}=(\mathfrak{J}_\varrho-\boldsymbol{a}_\varrho\cdot\mathfrak{E})^g\cdot\mathfrak{X}_\varrho\cdot(\mathfrak{U}-\boldsymbol{a}_\varrho\cdot\mathfrak{E})^{-g}.$$

Wegen $(\mathfrak{J}_\varrho-\boldsymbol{a}_\varrho\cdot\mathfrak{E})^{e_\varrho}=\mathfrak{O}$ erhält man deshalb nach höchstens e_ϱ Schritten

$$\mathfrak{X}_\varrho^{(e_\varrho)}=\mathfrak{O}.$$

(III 2) *Die verschärfte Ähnlichkeit.* Zwei n-reihige Matrizen $\begin{pmatrix}\mathfrak{A},\mathfrak{F}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{B}\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\overline{\mathfrak{A}},\overline{\mathfrak{F}}\\ \mathfrak{O},\overline{\mathfrak{B}}\end{pmatrix}$ mit m-reihigen Teilmatrizen $\mathfrak{A}$ bzw. $\overline{\mathfrak{A}}$ und $(n-m)$-reihigen Teilmatrizen $\mathfrak{B}$ bzw. $\overline{\mathfrak{B}}$ über $\boldsymbol{K}$ heißen „verschärft ähnlich", wenn es eine n-reihige invertierbare Matrix $\begin{pmatrix}\mathfrak{Q},\mathfrak{N}\\ \mathfrak{O},\mathfrak{R}\end{pmatrix}$ mit m-reihiger invertierbarer Teilmatrix

[29]) Freie Stellen bedeuten Nullen.

$\mathfrak{Q}$ und $(n-m)$-reihiger invertierbarer Teilmatrix $\mathfrak{R}$ gibt, so daß

$$\begin{pmatrix} \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{F}} \\ \mathfrak{C}, \overline{\mathfrak{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}^{-1}, & -\mathfrak{Q}^{-1} \cdot \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{R}^{-1} \\ \mathfrak{C}, & \mathfrak{R}^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{A}, \mathfrak{F} \\ \mathfrak{D}, \mathfrak{B} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}, \mathfrak{R} \\ \mathfrak{C}, \mathfrak{R} \end{pmatrix}$$

gilt. Es folgt

$$\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{Q}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{Q}, \quad \overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{R}^{-1} \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{R} \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{F}} = \mathfrak{Q}^{-1} \cdot (\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{R} + \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{R} - \mathfrak{R} \cdot \overline{\mathfrak{B}}).$$

Die Klasse der zu $\begin{pmatrix} \mathfrak{A}, \mathfrak{F} \\ \mathfrak{D}, \mathfrak{B} \end{pmatrix}$ verschärften ähnlichen Matrizen wird mit $\boldsymbol{\Gamma}_v \begin{pmatrix} \mathfrak{A}, \mathfrak{F} \\ \mathfrak{D}, \mathfrak{B} \end{pmatrix}$, und die Klasse der zu $\mathfrak{A}$ ähnlichen Matrizen mit $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A})$ bezeichnet usw. Man sieht sofort: Aus $\boldsymbol{\Gamma}_v \begin{pmatrix} \mathfrak{A}, \mathfrak{F} \\ \mathfrak{C}, \mathfrak{B} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Gamma}_v \begin{pmatrix} \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{F}} \\ \mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{B}} \end{pmatrix}$ folgt $\boldsymbol{\Gamma} \begin{pmatrix} \mathfrak{A}, \mathfrak{F} \\ \mathfrak{D}, \mathfrak{B} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Gamma} \begin{pmatrix} \mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{F}} \\ \mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{B}} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A}) = \boldsymbol{\Gamma}(\overline{\mathfrak{A}})$ und $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{B}) = \boldsymbol{\Gamma}(\overline{\mathfrak{B}})$. Die Umkehrung dieser Folgerung ist nicht so trivial und scheint auch nur mit einer gewissen Einschränkung zu gelten[30]:

Theorem 4. $\begin{pmatrix} \mathfrak{A}, \mathfrak{F} \\ \mathfrak{D}, \mathfrak{B} \end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix} \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{F}} \\ \mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{B}} \end{pmatrix}$ *seien n-reihige Matrizen mit m-reihigen Teilmatrizen* $\mathfrak{A}$ *bzw.* $\overline{\mathfrak{A}}$ *und* $(n-m)$*-reihigen Teilmatrizen* $\mathfrak{B}$ *bzw.* $\overline{\mathfrak{B}}$. *Aus* $\boldsymbol{\Gamma} \begin{pmatrix} \mathfrak{A}, \mathfrak{F} \\ \mathfrak{D}, \mathfrak{B} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Gamma} \begin{pmatrix} \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{F}} \\ \mathfrak{C}, \overline{\mathfrak{B}} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A}) = \boldsymbol{\Gamma}(\overline{\mathfrak{A}})$ *und* $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{B}) = \boldsymbol{\Gamma}(\overline{\mathfrak{B}})$ *folgt* $\boldsymbol{\Gamma}_v \begin{pmatrix} \mathfrak{A}, \mathfrak{F} \\ \mathfrak{D}, \mathfrak{B} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Gamma}_v \begin{pmatrix} \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{F}} \\ \mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{B}} \end{pmatrix}$, *wenn wenigstens eine der Matrizenklassen* $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A})$ *oder* $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{B})$ *keine eigenwertfreie Restmatrix besitzt.*

Beweis. Angenommen, $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A})$ besitzt keine eigenwertfreie Restmatrix. Dann geht $\begin{pmatrix} \mathfrak{A}, \mathfrak{F} \\ \mathfrak{D}, \mathfrak{B} \end{pmatrix}$ durch eine verschärfte Ähnlichkeitstransformation mit geeigneten Teilmatrizen $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ in[29]

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{Q}^{-1}, \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O}, \mathfrak{R}^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{A}, \mathfrak{F} \\ \mathfrak{D}, \mathfrak{B} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}, \mathfrak{O} \\ \mathfrak{C}, \mathfrak{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}^{-1} \cdot \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{R} \\ \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{R}^{-1} \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{R} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{J}_1^1 & & \mathfrak{F}_1^1 \cdots \mathfrak{F}_1^s, \mathfrak{F}_1 \\ & \ddots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ & & \mathfrak{F}_r^1, \mathfrak{F}_r^1 \cdots \mathfrak{F}_r^s, \mathfrak{F}_r \\ & & \mathfrak{J}_1^2 \\ & & & \ddots \\ & & & & \mathfrak{J}_s^2 \\ & & & & & \mathfrak{U} \end{bmatrix}$$

über. Dabei bedeuten $\mathfrak{J}_\varrho^1$ die zu den verschiedenen Eigenwerten von $\mathfrak{A}$ gehörigen Teilmatrizen der JORDANschen Normalform, $\mathfrak{J}_\sigma^2$ die zu den verschiedenen Eigenwerten von $\mathfrak{B}$ gehörigen Teilmatrizen der JORDANschen Normalform und $\mathfrak{U}$ die bis auf Ähnlichkeit eindeutig bestimmte eigenwertfreie Restmatrix von $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{B})$. Die Teilmatrizen $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_r$ von $\mathfrak{Q}^{-1} \cdot \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{R}$, die über $\mathfrak{U}$ stehen, werden nun durch den gleichen Kunstgriff, der im Teil 4 des

[30] Es gelang bisher nicht, zu entscheiden, ob das Theorem 4 auch dann noch gilt, wenn sowohl $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A})$ als auch $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{B})$ eine eigenwertfreie Restmatrix besitzen. Diese Frage scheint eng mit dem in der Anmerkung 15 berührten Problem zusammenzuhängen.

Beweises zum Theorem 3 verwendet wurde, und der offenbar stets eine verschärfte Ähnlichkeitstransformation der Gesamtmatrix bedeutet, zum Verschwinden gebracht; ebenso können die $\mathfrak{F}_\varrho^\sigma$ eliminiert werden, soweit $\mathfrak{J}_\varrho^1$ und $\mathfrak{J}_\sigma^2$ zu verschiedenen Eigenwerten gehören. Wenn aber $\mathfrak{J}_\varrho^1$ und $\mathfrak{J}_\sigma^2$ zu dem gleichen Eigenwert $\boldsymbol{a}$ gehören, so kann die Matrix $\begin{pmatrix} \mathfrak{J}_\varrho^1, & \mathfrak{F}_\varrho^\sigma \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{J}_\sigma^2 \end{pmatrix}$ durch eine geeignete verschärfte Ähnlichkeitstransformation auf eine Normalform $\begin{pmatrix} \mathfrak{J}_\varrho^1, & \mathfrak{F}_\varrho^\sigma \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{J}_\sigma^2 \end{pmatrix}$ gebracht werden, in der $\mathfrak{F}_\varrho^\sigma$ nur noch aus Nullen und Einsen besteht, und die sich von der üblichen JORDANschen Normalform nur durch eine andere Anordnung der Hauptvektoren unterscheidet; wieviele Einsen in $\mathfrak{F}_\varrho^\sigma$ stehenbleiben, und an welchen Stellen, hängt offensichtlich nur von den zum Eigenwert $\boldsymbol{a}$ gehörigen Rangdifferenzen von $\boldsymbol{\Gamma}\begin{pmatrix} \mathfrak{A}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{B} \end{pmatrix}$ ab. Damit hat $\begin{pmatrix} \mathfrak{A}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{B} \end{pmatrix}$ durch verschärfte Ähnlichkeitstransformationen eine Normalform angenommen, die von $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{A})$, $\boldsymbol{\Gamma}(\mathfrak{B})$ und $\boldsymbol{\Gamma}\begin{pmatrix} \mathfrak{A}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{B} \end{pmatrix}$ im wesentlichen eindeutig bestimmt wird und daher mit der entsprechenden Normalform von $\begin{pmatrix} \overline{\mathfrak{A}}, & \overline{\mathfrak{F}} \\ \mathfrak{O}, & \overline{\mathfrak{B}} \end{pmatrix}$ identisch ist. Demnach sind $\begin{pmatrix} \mathfrak{A}, & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{O}, & \mathfrak{B} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \overline{\mathfrak{A}}, & \overline{\mathfrak{F}} \\ \mathfrak{O}, & \overline{\mathfrak{B}} \end{pmatrix}$ verschärft ähnlich.

Literatur.

[1] BERTINI-DUSCHEK: Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume. 1924. — [2] BIRKHOFF: Lattice theory. 1948. — [3] BOURBAKI: Algèbre linéaire. 1947. — [4] COOKE: Infinite matrices and sequence spaces. 1950. — [5] DIEUDONNÉ: Sur la réduction canonique des couples de matrices. Bull. Soc. math. France **74**, 130—146 (1946). — [6] FANO: Enzyklop. math. Wiss., III 1_1. — [7] SPERNER: Beziehungen zwischen geometrischer und algebraischer Anordnung. Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. **1949**, 10. Abh. — [8] WEISNER: On m-dimensional cross-ratios. Ann. of Math. (2) **29**, 440—44 (1928).

Bonn, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 9. November 1954.)

Leptin, H.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 241—267 (1955)

Linear kompakte Moduln und Ringe.

Von

Horst Leptin.

Es ist ein häufig zu beobachtendes und im übrigen nicht weiter erstaunliches Phänomen, daß die Verhältnisse bei der Untersuchung algebraischer Strukturen weitgehend unübersichtlich werden, sowie man gewisse Endlichkeitsforderungen aufgibt. So ist z. B. seit Dedekind bekannt, daß die Sätze der klassischen Galoistheorie nur dann gelten, wenn man sich auf Körpererweiterungen endlichen Grades beschränkt. Die Zerlegung einer endlichen abelschen Gruppe in primäre Komponenten hat für unendliche Gruppen nicht einmal ein Analogon. Und die Wedderburnschen Struktursätze über halbeinfache Ringe hängen ebenfalls wesentlich von der vorausgesetzten Endlichkeitsbedingung für absteigende Ketten von Linksidealen ab. Nun hat Krull [5] gezeigt, daß man in der Galoistheorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen die Situation klären kann, wenn man sich der Begriffe der Topologie, genauer der topologischen Gruppen bedient: Man kann in einer vorgegebenen Galoisgruppe in naheliegender Weise eine topologische Struktur definieren und dann zeigen, daß die topologisch abgeschlossenen Untergruppen genau den Zwischenkörpern entsprechen. Es zeigt sich, daß die topologischen Galoisgruppen kompakt und total unzusammenhängend sind. Übrigens kann man zeigen, daß *jede* kompakte und total unzusammenhängende topologische Gruppe zu einer Galoisgruppe algebraisch und topologisch isomorph ist. Vor Krull zeigte bereits Prüfer [8], angeregt durch die Henselsche Methode der p-adischen Zahlen, daß auch für abelsche Gruppen die Topologie geeignete Mittel liefert, um wesentliche Ergebnisse von der Theorie der endlichen Gruppen auf unendliche zu übertragen. Durch Prüfers Verfahren der Topologisierung beliebiger abelscher Gruppen erhält man eine Klasse von Gruppen, für die wieder der Satz von der Zerlegung in primäre Komponenten gilt [7], [8]. Weiter kann man z. B. zeigen, daß jede periodische Prüfersche Gruppe vollständige direkte Summe einrangiger Gruppen ist [7]. In der Theorie der halbeinfachen Ringe schließlich zeigen Untersuchungen von Kaplansky [4] und Zelinsky [9], daß man auch hier mit der Topologie ein gutes Stück weiter kommt.

Sowohl die in [7] untersuchten Gruppen als auch die in [9] studierten Ringe sind Spezialfälle linear kompakter Operatormoduln. Der Begriff des linear kompakten Vektormoduls stammt von Lefschetz [6]; in [9] sind dann allgemeine linear kompakte Moduln definiert und einige ihrer wichtigsten Eigenschaften zusammengestellt. Wir entwickeln im ersten Abschnitt dieser Arbeit die allgemeine Theorie beliebiger linear kompakter Moduln; ihre

fundamentalsten Eigenschaften sind in den Aussagen (1), (2) und in Satz 1 enthalten: Die lineare Kompaktheit bleibt erhalten bei Übergang zu abgeschlossenen Untermoduln und zu stetig homomorphen Bildern, die Bildung des Durchschnitts abgeschlossener Restklassen eines Filters ist mit jedem stetigen Homomorphismus vertauschbar.

Satz 2 gibt Auskunft über die Vergröberungen einer gegebenen linear kompakten Topologie eines Moduls. Während die kompakten topologischen Räume dadurch ausgezeichnet sind, daß auf ihnen jede stetige Funktion auch offen ist, gibt es linear kompakte Moduln mit stetigen, nicht offenen Homomorphismen [9]. Wir werden so dazu geführt, einen Modul *im engeren Sinne linear kompakt* zu nennen, wenn jeder stetige Homomorphismus gleichzeitig offen ist. Die im engeren Sinne linear kompakten Moduln werden gekennzeichnet in Satz 4. Den Schluß des ersten Teiles dieser Arbeit bildet die Untersuchung gewisser Erweiterungen des Multiplikatorringes eines linear kompakten Moduls. Diese Oberringe lassen sich in naheliegender Weise so topologisieren, daß sie selbst zu linear kompakten Ringen werden.

Im zweiten Teil werden die linear kompakten assoziativen Ringe untersucht. Die Grundlage der Untersuchung bilden die Ergebnisse von JACOBSON über das Radikal eines beliebigen Ringes [1] und die Struktur primitiver Ringe [2]. Das Jacobsonsche Radikal eines linear kompakten Ringes ist immer abgeschlossen, es ist transfinit nilpotent (vgl. die Definitionen im zweiten Abschnitt), falls der Ring im engeren Sinne linear kompakt ist. Alle transfinit nilpotenten Ideale liegen im Radikal, jedes transfinit nilpotente Linksideal liegt in einem transfinit nilpotenten zweiseitigen Ideal, die Summe von zwei transfinit nilpotenten Idealen ist transfinit nilpotent, kurz, es gelten ganz analoge Sätze wie im Falle der erfüllten Minimalbedingung. Die Theorie der halbeinfachen Ringe läßt sich in gewisser Weise mit unseren Methoden zum Abschluß bringen: Jeder halbeinfache linear kompakte Ring ist vollständige direkte Summe voller Ringe linearer Transformationen von Vektormoduln beliebiger Dimension über beliebigen Schiefkörpern, ein einfacher nicht quasiregulärer linear kompakter Ring ist ein solcher voller Ring linearer Transformationen. Die Umkehrungen dieser Sätze gelten ebenfalls. Schließlich ist ein beliebiger halbeinfacher Ring dichter Unterring eines linear kompakten halbeinfachen Ringes und jeder dichte Unterring eines linear kompakten halbeinfachen Ringes ist halbeinfach. Die bisher bekannten Sätze dieser Art (Theorem 28 in [1], Theorem 16 und 17 in [4], Theorem 1 in [9]) sind Spezialfälle unserer Ergebnisse oder lassen sich aus ihnen leicht herleiten.

Im dritten Teil untersuchen wir spezielle direkte Zerlegungen allgemeinerer Operator-Doppelmoduln. Diese von uns *hyperdirekt* genannten Zerlegungen sind die natürlichen Verallgemeinerungen der Zerlegung halbeinfacher Ringe in einfache und Prüferscher Gruppen in primäre Summanden. Satz 16 besagt, daß aus der hyperdirekten Zerlegung gewisser Faktormoduln unter ziemlich allgemeinen Bedingungen auf die Existenz einer feinsten hyperdirekten Zerlegung des Moduls geschlossen werden kann. In die Definition der hyperdirekten Zerlegung des Moduls geht auch der Rechtsmultiplikatorenbereich

mit ein, es zeigt sich jedoch, daß die Rechtsmultiplikatoren, falls sie nur stetig sind, für die Zerlegungen keine Rolle spielen, d.h. die hyperdirekten Summanden einer Zerlegung sind invariant gegenüber allen mit den Linksoperatoren vertauschbaren stetigen Endomorphismen. Die Anwendung dieser Ergebnisse auf linear kompakte Moduln führt zu der bemerkenswerten Tatsache, daß sowohl die Zerlegung halbeinfacher linear kompakter Ringe in einfache, die Zerlegung kommutativer linear kompakter Ringe in vollständig primäre und Radikalringe als auch die Zerlegung Prüferscher Gruppen in primäre Summanden Spezialfälle eines allgemeinen Zerlegungssatzes für linear kompakte Moduln sind.

Zur Terminologie der Arbeit: Als *Filter* bezeichnen wir stets ein System $\boldsymbol{F}$ von Mengen $\mathfrak{F}_\mu$, mit der Eigenschaft, daß zu $\mathfrak{F}_\mu, \mathfrak{F}_\nu \in \boldsymbol{F}$ ein $\mathfrak{F}_\lambda \in \boldsymbol{F}$ mit $\mathfrak{F}_\lambda \subset \mathfrak{F}_\mu \cap \mathfrak{F}_\nu$ existiert. Ein *Basisfilter* einer topologischen Gruppe ist ein Filter, dessen Elemente ein Fundamentalsystem für die Umgebungen des neutralen Elementes der Gruppe bilden. Ist $\boldsymbol{F}$ ein Filter aus Teilmengen eines topologischen Raumes $\mathfrak{T}$, so bezeichnen wir mit $\downarrow \boldsymbol{F}$ die Menge der Berührungspunkte von $\boldsymbol{F}$:

$$\downarrow \boldsymbol{F} = \bigcap_{\mathfrak{F} \in \boldsymbol{F}} \overline{\mathfrak{F}}.$$

Unter $\overline{\mathfrak{F}}$ verstehen wir dabei stets die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{T}$. $\lim \boldsymbol{F} = t$ bedeutet: Jede Umgebung des Punktes $t \in \mathfrak{T}$ enthält ein $\mathfrak{F} \in \boldsymbol{F}$. Ist $\mathfrak{T}$ separiert, so folgt aus $\lim \boldsymbol{F} = t$ stets $\downarrow \boldsymbol{F} = t$.

Als *direkte Summe* $\sum_\mu \mathfrak{M}_\mu$ der Moduln $\mathfrak{M}_\mu$ bezeichnen wir das, was man gewöhnlich als *vollständige* oder *cartesische* direkte Summe der $\mathfrak{M}_\mu$ bezeichnet. Als Topologie in $\sum_\mu \mathfrak{M}_\mu$ wählen wir stets die Tychonoffsche. Die *algebraische* direkte Summe $\sum\limits^{\smile}_\mu \mathfrak{M}_\mu$ ist die von den $\mathfrak{M}_\mu$ algebraisch erzeugte Untergruppe von $\sum_\mu \mathfrak{M}_\mu$, für $x = \sum_\mu x_\mu \in \sum\limits^{\smile}_\mu \mathfrak{M}_\mu$ verschwinden also fast alle Komponenten $x_\mu \in \mathfrak{M}_\mu$. Im übrigen verwenden wir das Adjektiv *algebraisch*, wenn wir von den topologischen Eigenschaften des jeweils bezeichneten absehen wollen; so ist also ein algebraischer Homomorphismus eines topologischen Moduls eine Abbildung, welche die algebraischen Operationen erhält, im übrigen aber ruhig unstetig sein darf. Die von uns untersuchten Ringe sind alle assoziativ, die Ergebnisse insbesondere des dritten Teils lassen natürlich auch Anwendungen auf nichtassoziative Ringe zu, was wir hier jedoch nicht ausführen wollen.

I. Linear kompakte Moduln.

$\mathfrak{M}$ sei ein topologischer Modul und Λ ein System von Linksoperatoren von $\mathfrak{M}$. Wir nennen $\mathfrak{M}$ *linear topologisch* (bezüglich Λ), wenn $\mathfrak{M}$ separiert ist und einen Basisfilter aus Λ-invarianten Untermoduln besitzt. Ein linear topologischer Λ-Modul heißt *linear kompakt* (bezüglich Λ) oder kürzer l.k. (bezüglich Λ), wenn jeder Filter aus abgeschlossenen Λ-Untermoduln in $\mathfrak{M}$ Berührungspunkte hat.

Die wichtigsten elementaren Eigenschaften linear kompakter Moduln findet man etwa in [9]. Von besonderer Bedeutung sind die folgenden drei Eigenschaften ($\mathfrak{M}$ sei im folgenden stets l.k. bezüglich Λ):

(1) *Ein abgeschlossener Untermodul von $\mathfrak{M}$ ist linear kompakt bezüglich Λ.*

Beweis trivial.

Die im folgenden vorkommenden Untermoduln sollen stets Λ-invariant sein.

(2) *Ist φ ein stetiger Λ-Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ in einen linear topologischen Λ-Modul $\mathfrak{M}'$, so ist mit $\mathfrak{M}$ auch $\varphi(\mathfrak{M})$ linear kompakt* ([7] (3.5), [9], prop. 2).

Beweis. Sei $\boldsymbol{F}' = \{\mathfrak{A}'\}$ ein Filter abgeschlossener Restklassen von Untermoduln von $\varphi(\mathfrak{M})$. $\boldsymbol{F} = \{\varphi^{-1}(\mathfrak{A}')\}$ ist ein Filter abgeschlossener Restklassen in $\mathfrak{M}$, deshalb ist $\downarrow \boldsymbol{F} \neq \emptyset$, also auch $\varphi(\downarrow \boldsymbol{F}) = \downarrow \boldsymbol{F}' \neq \emptyset$.

Da ein l.k. Modul stets topologisch vollständig ist, erhalten wir als Folgerung aus (2), daß $\varphi(\mathfrak{M})$ in $\mathfrak{M}'$ abgeschlossen ist.

Satz 1. *Ist $\mathfrak{M}$ ein bezüglich Λ linear kompakter Modul, $\boldsymbol{R}$ ein Filter abgeschlossener Restklassen und φ ein stetiger Λ-Homomorphismus, so gilt:*

$$\downarrow \varphi(\boldsymbol{R}) = \varphi(\downarrow \boldsymbol{R}).$$

Beweis. Sei $\boldsymbol{R} = \{\mathfrak{R}_\mu\}_\mu$. Wir müssen $\downarrow \varphi(\boldsymbol{R}) \subset \varphi(\downarrow \boldsymbol{R})$ zeigen. Ist $x' \in \downarrow \varphi(\boldsymbol{R})$, so existiert zu jedem μ ein $x_\mu \in \mathfrak{R}_\mu$ mit $x' = \varphi(x_\mu)$. Sei $\mathfrak{R}_\mu$ Restklasse des Untermoduls $\mathfrak{A}_\mu$ und $\mathfrak{K}$ der Kern von φ. Die Restklassen

$$x_\mu + \mathfrak{A}_\mu \cap \mathfrak{K}$$

bilden ein Filter $\boldsymbol{A}$, denn ist $\mathfrak{A}_\mu \subset \mathfrak{A}_\nu$, so folgt aus $x_\mu + \mathfrak{A}_\mu \subset x_\nu + \mathfrak{A}_\nu$ und $\varphi(x_\mu - x_\nu) = 0$:

$$x_\mu - x_\nu \in \mathfrak{A}_\nu \cap \mathfrak{K}, \quad \text{also} \quad x_\mu + \mathfrak{A}_\mu \cap \mathfrak{K} \subset x_\nu + \mathfrak{A}_\nu \cap \mathfrak{K}.$$

Sei $x \in \downarrow \boldsymbol{A}$. Wegen $x - x_\mu \in \mathfrak{A}_\mu \cap \mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}$ ist $\varphi(x) = \varphi(x_\mu) = x'$ und wegen $x \in x_\mu + \mathfrak{A}_\mu \cap \mathfrak{K} \subset x_\mu + \mathfrak{A}_\mu = \mathfrak{R}_\mu$ liegt x in $\downarrow \boldsymbol{R}$. Folglich: $x' = \varphi(x) \in \varphi(\downarrow \boldsymbol{R})$. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Ist $\{\mathfrak{A}_\mu\}$ ein Filter abgeschlossener Untermoduln und $\mathfrak{B}$ ein abgeschlossener Untermodul, so folgt aus Satz 1 die Formel (vgl. [7], (3.3))

$$\bigcap_\mu (\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{B}) = \left(\bigcap_\mu \mathfrak{A}_\mu\right) + \mathfrak{B}. \tag{3}$$

Wir brauchen nämlich nur $\boldsymbol{R} = \{\mathfrak{A}_\mu\}$ zu setzen und für φ die Restklassenabbildung nach $\mathfrak{B}$ zu nehmen.

Aus (2) folgt (Beweis wie in [7]):

(4) *Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ abgeschlossene Untermoduln aus $\mathfrak{M}$, so ist auch der algebraisch von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erzeugte Untermodul $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ in $\mathfrak{M}$ abgeschlossen.*

Während die kompakten Topologien eines Raumes stets die gröbsten separierten sind, kann man die Topologie eines l.k. Moduls unter Umständen noch echt vergröbern; so ist z.B. der Modul P der ganzen p-adischen Zahlen in bezug auf die Multiplikation mit ganzen p-adischen Zahlen in der diskreten Topologie linear kompakt, erst recht also in der p-adischen, die eine echte Vergröberung der diskreten ist. Wir können jedoch folgenden Satz beweisen:

Satz 2. *Sei $\mathfrak{M}$ ein linear kompakter A-Modul mit der Topologie τ. Unter den linear kompakten Topologien von $\mathfrak{M}$, welche gröber als τ sind, gibt es genau eine maximale, d.h. gröbste linear kompakte Topologie τ^*. Alle τ-abgeschlossenen A-Untermoduln von $\mathfrak{M}$ sind auch τ^*-abgeschlossen. Ist $\tau' \geqq \tau$ eine linear kompakte Topologie von $\mathfrak{M}$, so ist $\tau' \leqq \tau^*$. τ^* ist gekennzeichnet durch die Eigenschaft, daß jeder Filter $\boldsymbol{A}$ abgeschlossener A-Untermoduln mit $\downarrow \boldsymbol{A} = 0$ gegen 0 konvergiert: Aus $\downarrow \boldsymbol{A} = 0$ folgt in τ^* $\lim \boldsymbol{A} = 0$. Jeder τ-stetige A-Homomorphismus φ von $\mathfrak{M}$ in einen linear topologischen A-Modul $\mathfrak{M}'$ mit gröbster linear kompakter Topologie ist auch τ^*-stetig. Insbesondere ist jeder τ-stetige A-Endomorphismus von $\mathfrak{M}$ auch τ^*-stetig.*

Beweis. Sei $\boldsymbol{B}$ der Basisfilter aller offenen A-Untermoduln von $\mathfrak{M}$. Ist $\mathfrak{U} \in \boldsymbol{B}$ und liegt $x \in \mathfrak{M}$ nicht in $\mathfrak{U}$, so gibt es nach dem Satz von Zorn einen maximalen A-Obermodul $\mathfrak{U}^*$ von $\mathfrak{U}$ mit $x \notin \mathfrak{U}^*$. Ist $\mathfrak{V}$ echter Obermodul von $\mathfrak{U}^*$, so liegt (x)[1] und somit auch $(x) + \mathfrak{U}^*$ in $\mathfrak{V}$, d.h. $(x) + \mathfrak{U}^*$ ist ein in allen Obermoduln von $\mathfrak{U}^*$ enthaltener und somit minimaler echter Obermodul von $\mathfrak{U}^*$. Wir wollen der Kürze halber einen solchen echten minimalen Obermodul eines Untermoduls $\mathfrak{W} < \mathfrak{M}$ als das *Dach* von $\mathfrak{W}$ bezeichnen und sagen, $\mathfrak{W}$ sei *überdacht*.

Unsere Überlegung zeigt, daß jedes $\mathfrak{U} \in \boldsymbol{B}$ Durchschnitt überdachter Obermoduln aus $\mathfrak{M}$ ist. Daraus folgt: 1. Ist $\boldsymbol{B}^*$ der von allen überdachten offenen $\mathfrak{U}^* \in \boldsymbol{B}$ erzeugte Filter, so ist $\downarrow \boldsymbol{B}^* = 0$. 2. Jeder abgeschlossene Untermodul von $\mathfrak{M}$ ist Durchschnitt von Moduln aus $\boldsymbol{B}^*$. Wegen 1. ist die durch $\boldsymbol{B}^*$ definierte Topologie τ^* separiert, wegen 2. sind in τ^* und der gegebenen Topologie τ dieselben A-Untermoduln abgeschlossen, insbesondere bedeutet $\downarrow \boldsymbol{A}$ für einen Filter $\boldsymbol{A}$ abgeschlossener Restklassen nach A-Untermoduln in τ und τ^* dasselbe.

Sei nun $\boldsymbol{A}$ ein Filter abgeschlossener Untermoduln mit $\downarrow \boldsymbol{A} = 0$. Ein $\mathfrak{U}^* \in \boldsymbol{B}^*$ ist Durchschnitt endlich vieler überdachter $\mathfrak{U}_i^* \in \boldsymbol{B}^*$ mit minimalen Obermoduln $\mathfrak{V}_i$. Nach (3) gilt für jedes i:

$$(*) \qquad \bigcap_{\mathfrak{A} \in \boldsymbol{A}} (\mathfrak{A} + \mathfrak{U}_i^*) = \Big(\bigcap_{\mathfrak{A} \in \boldsymbol{A}} \mathfrak{A}\Big) + \mathfrak{U}_i^* = \mathfrak{U}_i^*.$$

Falls $\mathfrak{A} + \mathfrak{U}_i^* \neq \mathfrak{U}_i^*$ für alle $\mathfrak{A} \in \boldsymbol{A}$ ist, folgte $\mathfrak{V}_i < \mathfrak{A} + \mathfrak{U}_i^*$, also $\mathfrak{V}_i < \bigcap_{\mathfrak{A} \in \boldsymbol{A}} (\mathfrak{A} + \mathfrak{U}_i^*)$, im Gegensatz zu $(*)$. Folglich existiert zu jedem i ein $\mathfrak{A}_i \in \boldsymbol{A}$ mit $\mathfrak{A}_i + \mathfrak{U}_i^* = \mathfrak{U}_i^*$, d.h. $\mathfrak{A}_i < \mathfrak{U}_i^*$. Liegt $\mathfrak{A} \in \boldsymbol{A}$ im Durchschnitt dieser endlich vielen $\mathfrak{A}_i$, so auch in $\bigcap_i \mathfrak{U}_i^* = \mathfrak{U}^*$. Jedes $\mathfrak{U}^* \in \boldsymbol{B}^*$ enthält also ein $\mathfrak{A} \in \boldsymbol{A}$, d.h. es ist $\lim \boldsymbol{A} = 0$.

Sei nun τ' irgendeine linear kompakte Vergröberung von τ. Ist $\mathfrak{A} < \mathfrak{M}$ ein bezüglich τ' abgeschlossener Untermodul, so ist $\mathfrak{A}$ auch bezüglich τ abgeschlossen und folglich auch bezüglich τ^*. Ist $\boldsymbol{B}'$ ein τ'-Basisfilter, so gilt $\downarrow \boldsymbol{B}' = 0$, also $\lim \boldsymbol{B}' = 0$ in τ^*, d.h. aber $\tau' \leqq \tau^*$, τ^* ist gröber als τ'.

Sei $\tau_1 \geqq \tau$ irgendeine l.k. Topologie von $\mathfrak{M}$, in der jeder Filter $\boldsymbol{A}$ aus Untermoduln mit $\downarrow \boldsymbol{A} = 0$ gegen 0 konvergiert. Wegen $\tau_1 \leqq \tau^*$ sind die $\mathfrak{U}^* \in \boldsymbol{B}^*$

[1] Mit (x) bezeichnen wir den von $x \in \mathfrak{M}$ erzeugten abgeschlossenen A-Untermodul von $\mathfrak{M}$.

in τ_1 abgeschlossen, wegen $\downarrow \boldsymbol{B}^* = 0$ konvergiert $\boldsymbol{B}^*$ also in τ_1 gegen Null, d.h. es ist $\tau^* \leqq \tau_1$. Daraus folgt $\tau_1 = \tau^*$.

Schließlich bleibt noch zu zeigen, daß jeder τ-stetige Λ-Homomorphismus φ von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}'$ auch τ^*-stetig ist. Wir zeigen zunächst:

Satz 3. *Ist $\mathfrak{N}$ abgeschlossener Untermodul von $\mathfrak{M}$, so induziert die gröbste linear kompakte Topologie von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{N}$ ebenfalls die gröbste Topologie.*

Sei $\boldsymbol{A}$ ein Filter abgeschlossener Untermoduln von $\mathfrak{N}$ mit $\downarrow \boldsymbol{A} = 0$. In $\mathfrak{M}$ konvergiert $\boldsymbol{A}$ dann in der gröbsten Topologie gegen Null, folglich konvergiert $\boldsymbol{A}$ auch in $\mathfrak{N}$ in der von der gröbsten $\mathfrak{M}$-Topologie induzierten gegen Null. Daraus folgt nach Satz 2, daß diese Topologie ebenfalls eine gröbste ist.

Wegen Satz 3 und der Abgeschlossenheit von $\varphi(\mathfrak{M})$ in $\mathfrak{M}'$ können wir uns im Beweis der letzten Behauptung von Satz 2 auf den Fall $\varphi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}'$ beschränken. Sei $\mathfrak{U}'$ in $\mathfrak{M}'$ offen und $\mathfrak{U} = \varphi^{-1}(\mathfrak{U}')$. $\mathfrak{U}$ ist in $\mathfrak{M}$ abgeschlossen und es gilt

$$\mathfrak{M}/\mathfrak{U} \cong \mathfrak{M}'/\mathfrak{U}'.$$

Nun ist $\mathfrak{U}'$ Durchschnitt endlich vieler überdachter offener $\mathfrak{V}' \subset \mathfrak{M}'$. Wegen der obigen Isomorphie der Faktormoduln muß dann auch $\mathfrak{U}$ Durchschnitt endlich vieler überdachter und somit τ^*-offener $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{M}$ sein. Folglich ist $\mathfrak{U}$ auch τ^*-offen, d.h. φ ist τ^*-stetig. Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

Sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ l.k. Λ-Moduln und φ ein stetiger Isomorphismus von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}'$, so ist φ in der gröbsten l.k. Topologie von $\mathfrak{M}$ eine offene Abbildung auf $\mathfrak{M}'$, d.h. jeder stetige Isomorphismus eines l.k. Moduls mit gröbster Topologie ist offen. Für stetige Homomorphismen ist diese Aussage allgemein nicht mehr richtig. Während jede stetige Funktion auf einem kompakten topologischen Raum von selbst offen ist, gibt es l.k. Moduln mit gröbster Topologie und stetigen, aber nicht offenen Homomorphismen.

Wir nennen einen l.k. Λ-Modul $\mathfrak{M}$ *im engeren Sinne linear kompakt* (i.e.S. l.k.), wenn jeder stetige Λ-Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ in einen linear topologischen Λ-Modul offen ist.

Linear kompakte Vektormoduln über Körpern, Prüfersche Gruppen und die im nächsten Abschnitt behandelten l.k. halbeinfachen Ringe sind i.e.S. l.k. Es entsteht die Aufgabe, Kriterien dafür anzugeben, daß ein Modul i.e.S. l.k. ist. Im folgenden Satz geben wir vier kennzeichnende Eigenschaften an.

Satz 4. *Die im engeren Sinne linear kompakten Λ-Moduln $\mathfrak{M}$ sind unter den vollständigen linear topologischen Λ-Moduln durch die folgenden vier äquivalenten Eigenschaften gekennzeichnet:*

a) *Jeder stetige Λ-Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ ist offen.*

b) *Jeder stetige Λ-Homomorphismus bildet $\mathfrak{M}$ auf einen Λ-Modul mit gröbster linearer Topologie ab.*

c) *In den Faktormoduln nach offenen Untermoduln von $\mathfrak{M}$ gilt die Minimalbedingung: Eine Kette $\mathfrak{U}_1 \supset \mathfrak{U}_2 \supset \cdots$ von Untermoduln $\mathfrak{U}_i \subset \mathfrak{M}$ mit offenem Durchschnitt $\bigcap_i \mathfrak{U}_i$ hat nur endlich viele verschiedene Glieder.*

d) $\mathfrak{M}$ *ist linear kompakt und jeder offene Untermodul von* $\mathfrak{M}$ *hat minimale Obermoduln.*

Wir beweisen den Satz nach dem Schema a)→b)→c)→d)→a).

Aus a) *folgt* b). φ sei ein stetiger Λ-Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}'$ und ψ sei ein stetiger Λ-Isomorphismus von $\mathfrak{M}'$ auf einen Λ-Modul $\mathfrak{M}''$. $\psi\varphi$ ist dann ein Λ-Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}''$ und folglich offen. Daraus ergibt sich, daß auch ψ offen ist: Jeder stetige Λ-Isomorphismus von $\mathfrak{M}'$ ist offen, die Topologie von $\mathfrak{M}'$ muß also eine gröbste sein.

Aus b) *folgt* c). Sei $\mathfrak{U}_1 \supset \mathfrak{U}_2 \supset \cdots$ eine Kette von Untermoduln aus $\mathfrak{M}$ mit offenem Durchschnitt $\mathfrak{U} = \bigcap_i \mathfrak{U}_i$. Die Kette $\boldsymbol{U} = \{\mathfrak{U}_i/\mathfrak{U}\}_i$ liefert in $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ eine lineare Topologie. Da die kanonische Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ stetig und $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ diskret ist, muß wegen b) auch die durch $\boldsymbol{U}$ definierte Topologie diskret sein, d.h. es muß ein k mit $\mathfrak{U}_k/\mathfrak{U} = 0$, also $\mathfrak{U}_k = \mathfrak{U}$ geben. Folglich sind alle Glieder mit $i \geq k$ gleich, d.h. es gilt c).

Aus c) *folgt* d). Ein Λ-Modul mit Minimalbedingung ist stets linear kompakt [9], die Faktormoduln von $\mathfrak{M}$ nach offene Untermoduln sind also alle linear kompakt. $\mathfrak{M}$ ist als vollständiger Modul projektiver (= inverser) Limes der diskreten Faktormoduln und folglich selbst l.k. (vgl. etwa [9]). Daß aus der Minimalbedingung auch die zweite Behauptung unter d) folgt, ist klar.

Aus d) *folgt* a). Dazu zwei Hilfssätze:

(5) *Das Erzeugnis der minimalen Untermoduln eines diskreten l.k.* Λ*-Moduls* $\mathfrak{L}$ *ist direkte Summe endlich vieler minimaler Untermoduln.*

Beweis. Wir nehmen an, wir hätten in $\mathfrak{L}$ bereits r minimale Untermoduln $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_r$ gefunden, so daß der von ihnen erzeugte Untermodul $\mathfrak{l}_r$ direkte Summe der $\mathfrak{m}_i$ ist:

$$\mathfrak{l}_r = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_r.$$

Enthält $\mathfrak{l}_r$ alle minimalen Untermoduln von $\mathfrak{L}$, so sind wir fertig. Andernfalls gibt es ein minimales $\mathfrak{m}_{r+1}$ mit $\mathfrak{l}_r \cap \mathfrak{m}_{r+1} = 0$; das Erzeugnis $\mathfrak{l}_{r+1}$ von $\mathfrak{l}_r$ und $\mathfrak{m}_{r+1}$ ist also direkte Summe:

$$(*) \qquad \mathfrak{l}_{r+1} = \mathfrak{l}_r \oplus \mathfrak{m}_{r+1}.$$

Nun muß allgemein in einem diskreten l.k. Modul eine Folge der Art (*) nach endlich vielen Schritten abbrechen: Sei $\mathfrak{l}$ das Erzeugnis aller $\mathfrak{m}_i$. $\mathfrak{l}$ ist die algebraische direkte Summe der $\mathfrak{m}_i$ und linear kompakt. $\mathfrak{h}_n$ sei das Erzeugnis der $\mathfrak{m}_i$ mit $i > n$. In jedem $\mathfrak{m}_i \neq 0$ wählen wir ein Element $x_i \neq 0$. Die Restklassen $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \mathfrak{h}_n$ bilden ein Filter, es gibt also ein $y = \Sigma y_i \in \mathfrak{l}$ mit $y \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i \pmod{\mathfrak{h}_n}$ für alle n. Da $\mathfrak{l}$ die algebraische direkte Summe der $\mathfrak{m}_i$ ist, folgt aus diesen Kongruenzen $x_i = y_i$. Nun sind nur endlich viele $y_i \neq 0$, folglich können auch nur endlich viele x_i und damit auch $\mathfrak{m}_i \neq 0$ sein. Hieraus folgt insbesondere Hilfssatz (5).

(6) *Hat jeder echte Untermodul des* Λ*-Moduls* $\mathfrak{N}$ *minimale Obermoduln in* $\mathfrak{N}$ *und ist* $\mathfrak{Q}$ *ein von* 0 *verschiedener Untermodul von* $\mathfrak{N}$*, so hat auch jeder echte Untermodul von* $\mathfrak{Q}$ *minimale Obermoduln in* $\mathfrak{Q}$.

Sei $\mathfrak{Q} \neq 0$ Untermodul von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Q}' \neq \mathfrak{Q}$ Untermodul von $\mathfrak{Q}$. Wir wollen zeigen, daß $\mathfrak{Q}'$ minimale Obermoduln in $\mathfrak{Q}$ besitzt. Dazu rechnen wir modulo $\mathfrak{Q}'$, d.h. setzen $\mathfrak{Q}' = 0$. Sei $\mathfrak{R}$ ein maximaler Untermodul von $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{Q} = 0$ (Zornsches Lemma). Sicher ist $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{R}$, es gibt also einen minimalen Obermodul $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{R}$, für den dann $\mathfrak{q} = \mathfrak{R}' \cap \mathfrak{Q} \neq 0$ ist. Wegen

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{R}' \cap \mathfrak{Q} = (\mathfrak{R}' \cap \mathfrak{Q})/(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{Q}) \cong (\mathfrak{R}' \cap \mathfrak{Q} + \mathfrak{R})/\mathfrak{R} < \mathfrak{R}'/\mathfrak{R}$$

ist $\mathfrak{q} \cong \mathfrak{R}'/\mathfrak{R}$, also minimal in $\mathfrak{Q}$.

Wir wollen nun den letzten Teil von Satz 4 beweisen. Sei φ ein stetiger Λ-Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{K}$ sein Kern. Wir müssen zeigen, daß $\varphi(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}'$ in $\varphi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}'$ offen ist, falls nur $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{M}$ offen ist. Wegen $\varphi(\mathfrak{U}) = \varphi(\mathfrak{U} + \mathfrak{K})$ können wir dabei $\mathfrak{K} < \mathfrak{U}$ annehmen. $\mathfrak{U}'$ ist in $\mathfrak{M}'$ abgeschlossen und φ induziert einen stetigen Isomorphismus des Faktormoduls $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ auf den Faktormodul $\mathfrak{F}' = \mathfrak{M}'/\mathfrak{U}'$. Hierbei führt φ das Erzeugnis $\mathfrak{A}$ der minimalen Untermoduln von $\mathfrak{F}$ über in das entsprechende Erzeugnis $\mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{F}'$. Nach (5) ist $\mathfrak{A}'$ endliche direkte Summe minimaler Untermoduln, so daß in $\mathfrak{A}'$ die Minimalbedingung gilt. Daraus folgt, daß $\mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{F}'$ diskret ist, es gibt in $\mathfrak{F}'$ also einen offenen Untermodul $\mathfrak{V}'$ mit $\mathfrak{V}' \cap \mathfrak{A}' = 0$. Wäre $\mathfrak{V}' \neq 0$, so enthielte es wegen (6) minimale Untermoduln $\neq 0$, was jedoch $\mathfrak{V}' \cap \mathfrak{A}' = 0$ widerspräche. Folglich ist $\mathfrak{V}' = 0$, d.h. $\mathfrak{F}'$ diskret, also $\mathfrak{U}'$ in $\mathfrak{M}'$ offen: φ ist offen. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir aus Satz 4:

(7) *Ist $\mathfrak{M}$ linear kompakt und hat jeder offene Untermodul minimale Obermoduln, so ist die Topologie von $\mathfrak{M}$ eine gröbste.*

Man könnte vermuten, daß von (7) auch die Umkehrung gilt; das ist jedoch nicht der Fall, wie folgendes Beispiel zeigt:

Sei $\mathfrak{P}$ der Modul der ganzen p-adischen Zahlen und $\mathfrak{Q}$ die Prüfersche Gruppe vom Typ p^∞, definiert durch ein Erzeugendensystem $\{z_i\}$ mit den Relationen $p z_{i+1} = z_i$, $p z_1 = 0$. Die direkte Summe $\mathfrak{M} = \mathfrak{P} \oplus \mathfrak{Q}$ ist ein in der diskreten Topologie l.k. Modul bezüglich des Ringes P der ganzen p-adischen Zahlen. Sei $e \in \mathfrak{P}$ ein bezüglich P erzeugendes Element aus $\mathfrak{P}$, d.h. sei $\mathfrak{P} = \mathsf{P}e$. Wir definieren mit P vertauschbare Endomorphismen τ_i von $\mathfrak{M}$ durch die Formeln

$$\tau_i(\varrho e) = \varrho z_i, \quad \tau_i(z_k) = 0 \qquad (\varrho \in \mathsf{P}).$$

Λ sei der von P und den τ_i erzeugte Endomorphismenring von $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ ist ein l.k. diskreter Λ-Modul. Wir behaupten, daß der Λ-Untermodul $\mathfrak{m} = (z_1)$ in allen von 0 verschiedenen Λ-Untermoduln $\mathfrak{U} < \mathfrak{M}$ enthalten ist. Das ist klar für die $\mathfrak{U} < \mathfrak{Q}$. Falls $\mathfrak{U} \not< \mathfrak{Q}$, enthält $\mathfrak{U}$ ein Element der Form $p^k e$. Dann ist $z_1 = \tau_{k-1}(p^k e) \in \mathfrak{U}$. Ist nun allgemein $\mathfrak{L}$ irgendein linear topologischer Λ-Modul mit einem minimalen, in allen von 0 verschiedenen Λ-Untermoduln enthaltenen Λ-Untermodul $\mathfrak{l}$, so ist $\mathfrak{L}$ notwendig diskret: Da $\mathfrak{l}$ minimal ist, muß es diskret sein, es gibt also einen offenen Untermodul $\mathfrak{U} < \mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{l} = 0$. Aus $\mathfrak{l} \not< \mathfrak{U}$ folgt aber $\mathfrak{U} = 0$, d.h. $\mathfrak{L}$ ist diskret. Wir sehen also, daß die diskrete Topologie unseres Moduls $\mathfrak{M}$ eine gröbste ist. Trotzdem hat $\mathfrak{Q}$ keinen minimalen Obermodul.

Das nächste Beispiel zeigt, daß ein linear topologischer Modul $\mathfrak{M}$ mit gröbster Topologie nicht einmal linear kompakt zu sein braucht. Wir nehmen unendlich viele zum Modul $\mathfrak{P}$ der ganzen p-adischen Zahlen isomorphe Moduln $\mathfrak{P}_\mu$ mit erzeugenden Elementen e_μ und die Prüfersche Gruppe $\mathfrak{Q}$ mit den Erzeugenden z_i und bilden die algebraische direkte Summe $\mathfrak{M} = \sum_\mu \mathfrak{P}_\mu \oplus \mathfrak{Q}$. Durch die Gleichungen

$$\tau_\mu^i(\varrho e_\nu) = \delta_{\mu\nu}\varrho z_i, \quad \tau_\mu^i(z_k) = 0, \quad \varrho \in \mathsf{P}, \quad \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \mu = \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sind Endomorphismen τ_μ^i von $\mathfrak{M}$ definiert. Λ sei der von P und den τ_μ^i erzeugte Endomorphismenring. Wie beim vorigen Beispiel sieht man, daß (z_1) in allen von 0 verschiedenen Λ-Untermoduln von $\mathfrak{M}$ enthalten ist. Daraus folgt wieder, daß die diskrete Topologie von $\mathfrak{M}$ nicht vergröbert werden kann. Der Faktormodul $\mathfrak{M}/\mathfrak{Q}$ ist zur algebraischen direkten Summe der $\mathfrak{P}_\mu$ isomorph, also nicht l.k., folglich ist auch $\mathfrak{M}$ nicht l.k.

Satz 5. *Untermoduln, stetig homomorphe Bilder und direkte Summen im engeren Sinne linear kompakter Moduln sind im engeren Sinne linear kompakt.*

a) Sei $\mathfrak{A}$ abgeschlossener Untermodul des i.e.S. l.k. Moduls $\mathfrak{M}$. Zu einem offenen Untermodul $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{A}$ existiert ein offener Untermodul $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{V} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{U}$. Aus $\mathfrak{A}/\mathfrak{V} \cong (\mathfrak{A} + \mathfrak{U})/\mathfrak{U}$ folgt nach Satz 4c), daß in $\mathfrak{U}/\mathfrak{V}$ die Minimalbedingung gilt. Deshalb ist, ebenfalls nach Satz 4c), $\mathfrak{A}$ i.e.S. l.k.

b) Aus Satz 4b) z.B. folgt unmittelbar, daß ein stetig homomorphes Bild von $\mathfrak{M}$ auch i.e.S. l.k. ist.

c) $\mathfrak{U}$ sei ein offener Untermodul der direkten Summe $\mathfrak{M} = \sum_\mu \mathfrak{M}_\mu$ der i.e.S. l.k. Moduln $\mathfrak{M}_\mu$. Wir können annehmen, daß $\mathfrak{U} = \sum_\mu \mathfrak{U}_\mu$ ist, wobei alle $\mathfrak{U}_\mu$ in $\mathfrak{M}_\mu$ offen und fast alle $\mathfrak{U}_\mu = \mathfrak{M}_\mu$ sind. Dann ist $\mathfrak{M}/\mathfrak{U} = \sum_\mu (\mathfrak{M}_\mu/\mathfrak{U}_\mu)$ endliche direkte Summe von Moduln mit Minimalbedingung. Folglich gilt auch in $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ die Minimalbedingung. Aus Satz 4c) folgt, daß $\mathfrak{M}$ i.e.S. l.k. ist.

Wir wollen nun genauer den Zusammenhang zwischen dem Modul $\mathfrak{M}$ und dem Multiplikatorenbereich Λ untersuchen. Wir setzen voraus, daß $\mathfrak{M}$ bezüglich Λ linear topologisch sei. Λ erzeugt algebraisch einen Endomorphismenring Λ^* von $\mathfrak{M}$. Es ist klar: Ist $\mathfrak{M}$ linear topologisch oder l.k. bezüglich Λ, so auch bezüglich Λ^* und umgekehrt. Wir wollen deshalb $\Lambda = \Lambda^*$ annehmen, also voraussetzen, daß Λ schon ein Ring ist. Wir können dann Λ in naheliegender Weise zum topologischen Ring machen (vgl. hierzu [3], 3. und 4.).

Sei $\mathfrak{U}$ ein offener Λ-Untermodul von $\mathfrak{M}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_r$ r Elemente aus $\mathfrak{M}$. Alle $\varrho \in \Lambda$ mit $\varrho x_i \in \mathfrak{U}$, $i = 1, 2, \ldots, r$, bilden ein Linksideal $L(x_1, x_2, \ldots, x_r; \mathfrak{U})$. Wegen

$$L(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s; \mathfrak{U} \cap \mathfrak{V}) \subset L(x_1, \ldots, x_r; \mathfrak{U}) \cap L(y_1, \ldots, y_s; \mathfrak{V})$$

bilden diese L ein Filter $\boldsymbol{L}$.

Wir wählen $\boldsymbol{L}$ als Basisfilter einer Topologie in Λ.

Liegt ξ in allen $L \in \boldsymbol{L}$, so folgt für $x \in \mathfrak{M}$ und jeden offenen Untermodul $\mathfrak{U}$: $\xi x \in \mathfrak{U}$, d.h. $\xi x = 0$, d.h. $\xi = 0$. Folglich ist Λ jedenfalls ein linear topologischer Λ-Modul. Ist $\sigma \in \Lambda$ und $L = L(x_1, \ldots, x_r; \mathfrak{U}) \in \boldsymbol{L}$, so gilt für $\xi \in L(\sigma x_1, \ldots, \sigma x_r; \mathfrak{U}) = L' \in \boldsymbol{L}$: $\xi \sigma x_i \in \mathfrak{U}$, d.h. $\xi \sigma \in L$, also $L'\sigma \subset L$, d.h. die Rechtsmultiplikation mit σ ist stetig. Folglich ist Λ ein topologischer Ring.

Die Endomorphismen aus Λ haben trivialerweise die Eigenschaft, daß sie jeden Λ-Untermodul von $\mathfrak{M}$ in sich abbilden. Wir wollen derartige Endomorphismen als *hyperstetig* bezeichnen. Ist Θ ein fester Bereich mit den Elementen aus Λ vertauschbarer stetiger Rechtsoperatoren von $\mathfrak{M}$, so bilden sämtliche hyperstetigen mit Θ vertauschbaren Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ einen Ring $R = R(\mathfrak{M}, \Theta)$ mit Eins, der Λ als Unterring enthält. Natürlich ist auch R ein topologischer Ring. Die Λ-invarianten Untermoduln von $\mathfrak{M}$ sind nach Definition mit den R-invarianten identisch. Topologisieren wir R in der oben beschriebenen Weise, so ist Λ als Unterring von R auch topologisch. Es ist evident, daß die so induzierte Topologie von Λ mit der durch unser Verfahren, angewandt auf Λ, erhaltenen identisch ist.

Satz 6. *Der Ring $R(\Theta)$ der hyperstetigen mit Θ vertauschbaren Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ ist topologisch vollständig.*

Beweis. Sei $\boldsymbol{C} = \{\alpha_\mu + L_\mu\}$ Cauchyfilter von R und $x \in \mathfrak{M}$. Zu $\alpha + L(x; \mathfrak{U}) \in \boldsymbol{C}$ bilden wir in $\mathfrak{M}$ die Restklassen $\alpha x + \mathfrak{U}$. Sämtliche $\alpha x + \mathfrak{U}$ bilden in $\mathfrak{M}$ ein Cauchyfilter $\boldsymbol{C}^*$. Wir setzen $\lim \boldsymbol{C}^* = \gamma x$ und behaupten: γ ist ein hyperstetiger mit Θ vertauschbarer Endomorphismus von $\mathfrak{M}$.

a) Aus der Relation

$$L(x, y; \mathfrak{U}) \subset L(x; \mathfrak{U}) \cap L(y; \mathfrak{U}) \cap L(x - y; \mathfrak{U})$$

folgt für die entsprechenden Restklassen aus $\boldsymbol{C}$:

$$\alpha + L(x, y; \mathfrak{U}) \subset \big(\alpha_1 + L(x; \mathfrak{U})\big) \cap \big(\alpha_2 + L(y; \mathfrak{U})\big) \cap \big(\alpha_3 + L(x - y; \mathfrak{U})\big)$$

also

$$\alpha x + \mathfrak{U} = \alpha_1 x + \mathfrak{U}, \quad \alpha y + \mathfrak{U} = \alpha_2 y + \mathfrak{U}$$

$$\alpha_3(x - y) + \mathfrak{U} = \alpha(x - y) + \mathfrak{U} = (\alpha x + \mathfrak{U}) - (\alpha y + \mathfrak{U})$$

$$= (\alpha_1 x + \mathfrak{U}) - (\alpha_2 y + \mathfrak{U}).$$

Hieraus folgt $\gamma(x - y) = \gamma x - \gamma y$.

b) Sei $\mathfrak{U}$ offener R-Untermodul von $\mathfrak{M}$, $x \in \mathfrak{U}$ und $\alpha + L(x, \mathfrak{U}) \in \boldsymbol{C}$. Es ist $\gamma x \equiv \alpha x \pmod{\mathfrak{U}}$, also wegen $\alpha \in R$, $x \in \mathfrak{U}$: $\gamma x \in \mathfrak{U}$, d.h. $\gamma(\mathfrak{U}) \subset \mathfrak{U}$. Folglich ist γ ein hyperstetiger Endomorphismus.

c) $\mathfrak{U}$ sei ein offener Untermodul und $\vartheta \in \Theta$. Da ϑ stetig ist, gibt es einen offenen Untermodul $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{V}\vartheta \subset \mathfrak{U}$ und ein $\alpha \in R(\Theta)$ mit

$$\alpha + L(x; \mathfrak{V}) \in \boldsymbol{C}, \quad \alpha + L(x\vartheta; \mathfrak{U}) \in \boldsymbol{C}$$

also

$$\gamma x \equiv \alpha x \pmod{\mathfrak{V}}, \quad \gamma(x\vartheta) \equiv \alpha(x\vartheta) \pmod{\mathfrak{U}}.$$

Aus diesen Kongruenzen und $\mathfrak{V}\vartheta \subset \mathfrak{U}$ folgt wegen $(\alpha x)\vartheta = \alpha(x\vartheta)$:

$$(\gamma x)\vartheta \equiv (\alpha x)\vartheta \equiv \alpha(x\vartheta) \pmod{\mathfrak{U}}, \quad \text{d.h.} \quad (\gamma x)\vartheta \equiv \gamma(x\vartheta) \pmod{\mathfrak{U}}.$$

Das gilt für jedes offene $\mathfrak{U}$, folglich ist $(\gamma x)\vartheta = \gamma(x\vartheta)$, γ liegt also in $R(\Theta)$. Offensichtlich ist $\gamma = \lim \boldsymbol{C}$. Damit ist Satz 6 bewiesen.

(8) *Ist $\mathfrak{X}$ eine Teilmenge und $\mathfrak{A}$ ein abgeschlossener Untermodul von $\mathfrak{M}$, so ist die Menge aller $\xi \in R$ mit $\xi\mathfrak{X} \subset \mathfrak{A}$ ein abgeschlossenes Linksideal in R. Ist $\mathfrak{B}$ R-Obermodul von $\mathfrak{A}$, so ist die Menge aller $\xi \in R$ mit $\xi\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ ein zweiseitiges abgeschlossenes Ideal in R.*

Die Idealeigenschaft ist in beiden Fällen klar. Die Menge aller $\xi \in R$ mit $\xi\mathfrak{X} \subset \mathfrak{A}$ ist genau der Durchschnitt aller offenen Ideale $L(x; \mathfrak{U})$, wobei x alle Elemente aus $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{U}$ alle offenen Obermoduln von $\mathfrak{A}$ durchläuft. Dieser Durchschnitt ist abgeschlossen.

(9) *$\mathfrak{M}$ ist ein topologischer R-Modul, d.h. die Abbildung des Produktraumes $R \times \mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}$ ist stetig.*

Ist $\mathfrak{U}$ ein offener R-Untermodul von $\mathfrak{M}$, $\xi \in R$ und $x \in \mathfrak{M}$, so enthält das Urbild von $\xi x + \mathfrak{U}$ in $R \times \mathfrak{M}$ die offene Menge $\big(\xi + L(x; \mathfrak{U})\big) \times (x + \mathfrak{U})$.

Im folgenden wollen wir nun wieder annehmen, daß $\mathfrak{M}$ linear kompakt sei. Ein topologischer Ring S heiße linear kompakt, wenn er als topologischer S-Linksmodul linear kompakt ist.

Satz 7. *Der Ring $R(\Theta)$ der hyperstetigen mit Θ vertauschbaren Endomorphismen eines linear kompakten Moduls $\mathfrak{M}$ ist linear kompakt. Ist $\mathfrak{M}$ im engeren Sinne linear kompakt, so auch $R(\Theta)$.*

Nach Satz 6 ist $R = R(\Theta)$ ein vollständiger linear topologischer Ring, wir brauchen also nur zu zeigen, daß die Faktormoduln von R nach offenen Linksidealen $L(x_1, \ldots, x_r; \mathfrak{U})$ als R-Moduln linear kompakt sind. Für $z \in \mathfrak{M}$ sei $\overline{z} = (z + \mathfrak{U})/\mathfrak{U}$ das Bild von z im Restklassenmodul $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/\mathfrak{U}$. Durch $\xi \to \{\overline{\xi x_1}, \overline{\xi x_2}, \ldots, \overline{\xi x_r}\} = \varphi(\xi)$ ist ein R-Homomorphismus von R auf einen Untermodul $\mathfrak{R}$ der r-gliederigen l.k. diskreten direkten Summe $\overline{\mathfrak{M}} \oplus \overline{\mathfrak{M}} \oplus \cdots \oplus \overline{\mathfrak{M}}$ definiert, $\varphi(\xi) = 0$ bedeutet $\xi x_i \in \mathfrak{U}$ für $i = 1, \ldots, r$, d.h. $\xi \in L(x_1, \ldots, x_r; \mathfrak{U}) = L$. Folglich ist L der Kern von φ und R/L mit $\mathfrak{R}$ operatorisomorph. Da R/L und $\mathfrak{R}$ beide diskret sind, folgt aus der linearen Kompaktheit von $\mathfrak{R}$ die von R/L.

Ist $\mathfrak{M}$ i.e.S. l.k., so auch $\overline{\mathfrak{M}}$, wegen Satz 5 also auch $\mathfrak{R}$ und folglich auch R/L. Da L offen ist, bedeutet das die Gültigkeit der Minimalbedingung in R/L. Wegen Satz 4 ist R dann i.e.S. l.k. Damit ist Satz 7 bewiesen.

Aus (2) und (9) folgt:

(10) *Bezeichnungen wie in Satz 7. Ist A ein abgeschlossenes Linksideal aus R und $x \in \mathfrak{M}$, so ist Ax in $\mathfrak{M}$ abgeschlossen.*

II. Linear kompakte Ringe.

Wir wollen nun genauer die Struktur linear kompakter Ringe untersuchen. Dabei fassen wir die Ringe stillschweigend stets gleichzeitig als Operatormoduln mit sich selbst als Linksoperatorenbereich auf. In den linear topologischen Ringen induzieren dann die Linksmultiplikationen hyperstetige und

die Rechtsmultiplikationen stetige Endomorphismen. Die Rechtsmultiplikationen sind überdies R-Endomorphismen des Ringes R. Aus Satz 2 folgt, daß ein l.k. Ring R ein topologischer Ring bleibt, wenn man die Topologie vergröbert. Wir bemerken, daß ein abgeschlossener Unterring S eines l.k. Ringes R als Ring nicht linear kompakt zu sein braucht! Ein S-invarianter Untermodul von S braucht nämlich nicht auch R-invariant zu sein. So enthält z.B. jede nicht halbeinfache Algebra endlichen Ranges über einem unendlichen Körper ein von 0 verschiedenes Ideal S mit verschwindendem Quadrat: $S^2=0$. S ist also ein Zeroring und jeder Untermodul von S ist S-zulässig, S kann deshalb nicht l.k. sein.

Wir benötigen für unsere Untersuchung einige von JACOBSON [1] stammende Begriffe und Resultate:

Sind x und y Elemente des Ringes R, so setzen wir

$$x \circ y = x + y + xy.$$

Enthält R eine 1, so ist

$$1 + x \circ y = (1 + x)(1 + y).$$

Aus dieser Formel folgt das Assoziativgesetz $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$. $x \in R$ heißt *links-* (*rechts-*) *quasiregulär* (l.q.r., bzw. r.q.r.), wenn es ein $y \in R$ mit $y \circ x = 0$ ($x \circ y = 0$) gibt. y heißt in diesem Falle *Links-* (*Rechts-*) *Quasiinverses* von x. x heißt *quasiregulär* (q.r.), wenn es sowohl l.q.r. als auch r.q.r. ist. In diesem Fall existiert genau ein mit x vertauschbares Quasiinverses. Ein Links- (Rechts-)ideal heißt quasiregulär, wenn alle seine Elemente l.q.r. (r.q.r.) sind. Die Vereinigung aller q.r. Linksideale ist nach JACOBSON [1] ein zweiseitiges Ideal, dessen sämtliche Elemente q.r. sind. Dieses maximale q.r. Ideal ist das *Jacobsonsche Radikal* oder auch kurz das *Radikal* des Ringes. Der Ring heißt halbeinfach, wenn das Radikal verschwindet. Der Restklassenring nach dem Radikal ist stets halbeinfach.

Satz 8. *Das Jacobsonsche Radikal N eines linear kompakten Ringes R ist stets abgeschlossen.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß die abgeschlossene Hülle $\overline{N}$ von N in R q.r. ist, d.h. daß jeder Häufungspunkt von N l.q.r. ist. Sei $\boldsymbol{B} = \{L_\mu\}$ der Filter aller offenen Linksideale aus R und $h \in \overline{N}$ Häufungspunkt von N. Alle Elemente $x \in R$ mit $x + xh \in L_\mu$ für $L_\mu \in \boldsymbol{B}$ bilden ein abgeschlossenes Linksideal H_μ, nämlich den Kern des stetigen R-Homomorphismus $x \to x + xh$ modulo L_μ. Zu jedem $L_\mu \in \boldsymbol{B}$ existiert ein $p_\mu \in R$ mit $p_\mu \circ h \in L_\mu$. Ist p'_μ ein anderes Element mit $p'_\mu \circ h \in L_\mu$, so folgt

$$p_\mu - p'_\mu + (p_\mu - p'_\mu)h \in L_\mu,$$

d.h.

$$p_\mu \equiv p'_\mu \pmod{H_\mu}.$$

Die Restklassen $p_\mu + H_\mu$ sind also durch h eindeutig bestimmt und bilden insbesondere einen Filter $\boldsymbol{H}$. Sei $p \in \downarrow \boldsymbol{H}$. Es ist $p = p_\mu + q_\mu$ mit $q_\mu \in H_\mu$ also

$$p \circ h = p_\mu + q_\mu + h + p_\mu h + q_\mu h = p_\mu \circ h + q_\mu + q_\mu h \equiv 0 \pmod{L_\mu}.$$

Aus $p \circ h \in L_\mu$ für alle μ folgt $p \circ h = 0$, d.h. p ist Linksquasiinverses von h. Folglich ist $\bar{N}$ q.r., also in N enthalten, d.h. $N = \bar{N}$ ist abgeschlossen.

In Ringen mit Minimalbedingung ist das Radikal bekanntlich (vgl. [1], Theorem 9) nilpotent. Umgekehrt liegt allgemein jedes nilpotente Ideal im Radikal. Wir werden den Begriff des nilpotenten Ideals geeignet verallgemeinern und können dann zeigen, daß entsprechende Sätze auch für l.k. Ringe gelten. Wir werden im folgenden mit $\bar{M}$ stets die abgeschlossene Hülle einer Menge M des l.k. Ringes R bezeichnen.

Sei A ein abgeschlossenes ein- oder zweiseitiges Ideal aus R. Wir definieren drei absteigende Ketten von Unteridealen A_μ, ${}_\mu A$ und $\underset{\mu}{A}$ durch die Formeln

$$A_0 = A \qquad {}_0A = A \qquad \underset{0}{A} = A$$

$$A_{\mu+1} = \overline{A_\mu \cdot A} \qquad {}_{\mu+1}A = \overline{A \cdot {}_\mu A} \qquad \underset{\mu+1}{A} = \overline{\underset{\mu}{A}\,\underset{\mu}{A}}$$

$$A_\lambda = \bigcap_{\mu<\lambda} A_\mu \qquad {}_\lambda A = \bigcap_{\mu<\lambda} {}_\mu A \qquad \underset{\lambda}{A} = \bigcap_{\mu<\lambda} \underset{\mu}{A},$$

falls λ Limeszahl ist.

Sei ζ eine feste Ordnungszahl, für welche die Menge aller $\mu < \zeta$ größere Mächtigkeit als R hat. Zu A existiert ein $\alpha < \zeta$ mit $A_\mu = A_\alpha$ für alle $\mu > \alpha$, also insbesondere $A_\mu = A_\zeta$ für alle $\mu > \zeta$. Entsprechend ist ${}_\mu A = {}_\zeta A$ und $\underset{\mu}{A} = \underset{\zeta}{A}$ für alle $\mu > \zeta$. Wir setzen

$$A_* = A_\zeta \qquad {}_*A = {}_\zeta A \qquad \underset{*}{A} = \underset{\zeta}{A}.$$

Die Ideale A_*, ${}_*A$ und $\underset{*}{A}$ sind abgeschlossene Unterideale von A und genügen den Gleichungen

$$\overline{A_* \cdot A} = A_* \qquad \overline{A \cdot {}_*A} = {}_*A \qquad \overline{\underset{*}{A}\,\underset{*}{A}} = \underset{*}{A}.$$

Das Ideal A heißt *transfinit r-nilpotent*, wenn $A_* = 0$ ist, *transfinit l-nilpotent*, falls ${}_*A = 0$ ist und *transfinit nilpotent*, falls $\underset{*}{A} = 0$ ist. Den Zusatz *transfinit* werden wir, sofern keine Mißverständnisse möglich sind, fortlassen. Da $\underset{*}{A}$ in A_* und ${}_*A$ enthalten ist, ist ein $r(l$-$)$nilpotentes Ideal stets nilpotent.

Wir setzen nun voraus, daß R i.e.S. l.k. sei. Ist $\mathfrak{M}$ ein irreduzibler R-Modul mit dem zweiseitigen annullierenden Ideal S, so ist der Faktorring R/S als irreduzibler Endomorphismenring von $\mathfrak{M}$ nach [2] halbeinfach. Folglich liegt das Radikal N von R in S, d.h. es ist $N\mathfrak{M} = 0$. Sei L ein beliebiges offenes Linksideal und L' das Oberideal aller $\xi \in R$ mit $N_* \xi \subset L$. Ist $L' \neq R$, so gibt es ein minimales Oberideal J von L'. Unsere eben angestellte Überlegung zeigt, daß $N(J/L') = 0$, d.h. $NJ \subset L'$ ist. Es folgt $N_* \cdot NJ \subset N_* \cdot L' \subset L$. Ähnlich wie zu (8) sieht man, daß das Ideal der $\xi \in R$ mit $\xi J \subset L$ abgeschlossen ist. Daraus folgt $N_* \cdot J = \overline{N_* \cdot N} J \subset L$, im Widerspruch zur Maximalität von L'. Wir sehen also, daß $N_* \cdot R$ in jedem offenen Linksideal L liegt. Daraus folgt $N_* = N_* \cdot R = 0$:

Satz 9. *Das Radikal eines im engeren Sinne linear kompakten Ringes ist transfinit r-nilpotent.*

Für das folgende brauchen wir ein

Lemma. *Ist T ein beliebiger topologischer Ring und sind A und B nicht notwendig abgeschlossene ein- oder zweiseitige Ideale aus T, so gilt für die abgeschlossenen Hüllen:*

$$\overline{\overline{A}B} = \overline{A\overline{B}} = \overline{AB}.$$

Beweis. Ist a Häufungspunkt von A, so ist für $b \in B$ wegen der Stetigkeit der Rechtsmultiplikation ab Häufungspunkt von Ab, d.h. es gilt

$$\overline{A}b \subset \overline{\overline{A}b} \subset \overline{AB}$$

also, da b in B beliebig gewählt war: $\overline{A}B \subset \overline{AB}$ und folglich $\overline{\overline{A}B} \subset \overline{AB}$. Da trivialerweise auch $\overline{AB}$ in $\overline{\overline{A}B}$ liegt, folgt $\overline{\overline{A}B} = \overline{AB}$. Entsprechend $\overline{A\overline{B}} = \overline{AB}$.

(11) *Jedes nilpotente (r-nilpotente) Linksideal liegt in einem nilpotenten (r-nilpotenten) zweiseitigen Ideal.*

Sei L ein nilpotentes (r-nilpotentes) Linksideal und $H = \overline{LR}$. Wir behaupten: Für jedes μ gilt

(*) $$\underset{*}{\overline{HL}} \subset \underset{\mu}{L} \qquad (\overline{H_* \cdot L} \subset L_\mu).$$

Das ist richtig für $\mu = 0$. Gilt (*) für μ, so folgt für $\mu + 1$ (um die Querstriche brauchen wir uns wegen des Lemmas nicht zu kümmern):

$$\underset{*}{\overline{HL}} = \underset{* * *}{\overline{HHHL}} \subset \underset{* *}{\overline{HHHL}} = \underset{*}{\overline{HLRHL}} \subset \underset{* *}{\overline{HLHL}} \subset \underset{\mu \mu}{\overline{LL}} = \underset{\mu+1}{L}$$

$$(\overline{H_* \cdot L} = \overline{H_* \cdot HL} = \overline{H_* \cdot LRL} \subset \overline{H_* LL} \subset \overline{L_\mu \cdot L} = L_{\mu+1}).$$

Folglich stimmt (*) auch für $\mu + 1$. Ist λ Limeszahl und gilt (*) für alle $\mu < \lambda$, so folgt

$$\underset{*}{\overline{HL}} \subset \bigcap_{\mu < \lambda} \underset{\mu}{L} = \underset{\lambda}{L} \qquad (H_* \cdot L \subset \bigcap_{\mu < \lambda} L_\mu = L_\lambda).$$

Also stimmt (*) für alle μ und insbesondere für ζ, d.h. es ist $\underset{*}{HL} = H_* \cdot L = 0$. Hieraus folgt

$$\underset{*}{H} = \underset{* *}{\overline{HH}} \subset \underset{*}{\overline{HH}} = \underset{*}{\overline{HLR}} = 0 \qquad (H_* = \overline{H_* \cdot H} = \overline{H_* \cdot LR} = 0).$$

H ist also nilpotent (r-nilpotent). $J = L + H$ ist ein nach (2) abgeschlossenes zweiseitiges Oberideal von L. Aus

$$\underset{1}{J} = J_1 = \overline{JJ} = \overline{(L+H)(L+H)} \subset \overline{(L+H)R} \subset \overline{LR} + H = H$$

folgt, daß J nilpotent (r-nilpotent) ist, womit wir (11) bewiesen haben.

(12) *Sind die Linksideale A und B nilpotent, so auch ihre Summe $A + B$.*

Wegen (11) dürfen wir annehmen, daß A und B zweiseitig sind. Sei $A + B = C$. Wir behaupten: Für alle μ gilt

(**) $$\underset{*}{C} \subset \underset{\mu}{A} + B \qquad (C_* \subset A_\mu + B).$$

Das stimmt für $\mu = 0$. Aus $\overset{*}{(*)}$ folgt für $\mu + 1$:

$$\underset{*}{C} = \overline{\underset{**}{CC}} \subset \overline{\underset{\mu}{(A+B)}\,\underset{\mu}{(A+B)}} \subset \overline{\underset{\mu}{A^2} + B} = \underset{\mu+1}{A} + B$$

$$(C_* = \overline{C_* \cdot C} \subset \overline{(A_\mu + B)(A+B)} \subset \overline{A_\mu \cdot A} + B = A_{\mu+1} + B).$$

Gilt $\overset{*}{(*)}$ für alle $\mu < \lambda$, λ Limeszahl, so folgt nach Satz 1 auch

$$\underset{*}{C} \subset \bigcap_{\mu<\lambda} \underset{\mu}{(A+B)} = \underset{\mu}{(\bigcap A)} + B = \underset{\lambda}{A} + B \quad (C_* \subset A_\lambda + B).$$

Folglich stimmt $\overset{*}{(*)}$ für alle μ und insbesondere ist $\underset{*}{C} \subset \underset{*}{A} + B = B$ ($C_* \subset A_* + B = B$), also $\underset{*}{C} = \underset{**}{C} \subset \underset{*}{B} = 0$. (Für C_* müssen wir etwas anders schließen: Aus $C_* \subset B$ folgt $C_* = \overline{C_* \cdot C} \subset \overline{B_\mu \cdot B} = B_{\mu+1}$ und aus $C_* \subset B_\mu$ für alle $\mu < \lambda =$ Limeszahl $C_* \subset \bigcap_\mu B_\mu = B_\lambda$, also insbesondere $C_* \subset B_\zeta = B_* = 0$, d.h. $C_* = 0$). Damit ist (12) bewiesen.

Satz 10. *Jedes transfinit nilpotente Linksideal eines linear kompakten Ringes ist quasiregulär.*

Sei $L \subset R$ ein nilpotentes Linksideal und $a \in L$. Wir definieren durch transfinite Induktion ein Filter $\boldsymbol{F} = \{b_\mu + \underset{\mu}{L}\}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$1.\quad b_\mu \in L \qquad 2.\quad a \circ b_\mu \in \underset{\mu}{L}.$$

Mit $b_1 = a$ sind für $\mu = 1$ beide Bedingungen erfüllt. Haben wir $b_\mu + \underset{\mu}{L}$ bereits so definiert, daß 1. und 2. erfüllt sind, so setzen wir $b_{\mu+1} = b_\mu \circ (-c)$ mit $c = a \circ b_\mu$. Das Element $b_{\mu+1}$ liegt in L und aus 2. folgt

$$b_{\mu+1} = b_\mu - c - b_\mu c \equiv b_\mu \left(\operatorname{mod} \underset{\mu}{L}\right).$$

Ferner ist

$$a \circ b_{\mu+1} = a \circ b_\mu \circ (-c) = c \circ (-c) = -c^2 \in \underset{\mu}{L}\,\underset{\mu}{L} \subset \underset{\mu+1}{L}.$$

Damit ist auch $b_{\mu+1} + \underset{\mu+1}{L}$ so definiert, daß 1. und 2. erfüllt sind. Ist λ Limeszahl und $b_\mu + \underset{\mu}{L}$ für alle $\mu < \lambda$ definiert, so sei b_λ ein Element aus $\bigcap_{\mu<\lambda} (b_\mu + \underset{\mu}{L})$. Dann gilt für $b_\lambda + \underset{\lambda}{L}$ wieder 1. und 2. So können wir $b_\mu + \underset{\mu}{L}$ für alle μ erklären. Für $\mu = \zeta$ ist $\underset{\zeta}{L} = \underset{*}{L} = 0$ und aus 2. folgt $a \circ b_\zeta = 0$, a ist also r.q.r. Wegen 1. liegt $b = b_\zeta$ in L, ist also ebenfalls r.q.r. Wegen $a \circ b = 0$ ist b aber auch l.q.r. mit dem Quasiinversen a. Folglich sind a und b q.r. Da $a \in L$ beliebig war, ist dann auch L q.r., was zu beweisen war.

Ist ω die erste transfinite Ordnungszahl, so ist für jedes Ideal A aus R offensichtlich ${}_\omega A = A_\omega = \underset{\omega}{A} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A^i}$.

Satz 11. *Ist der Ring R im engeren Sinne linear kompakt, und A ein transfinit l-nilpotentes Linksideal, so ist ${}_\omega A \cdot R = 0$.*

Ist L ein offenes Linksideal aus R, so ist $\mathfrak{M} = R/L$ ein i.e.S. l.k. diskreter R-Modul, in $\mathfrak{M}$ gilt also nach Satz 4 die Minimalbedingung. Zu $x \in \mathfrak{M}$ gibt es demnach ein n_0, so daß $A^{n_0} x = A^j x$ gilt für alle natürlichen Zahlen $j > n_0$. Ist nun ${}_\mu A x = A^{n_0} x$ für eine Ordnungszahl μ, so folgt ${}_{\mu+1} A x = A \cdot {}_\mu A x = A^{n_0+1} x = A^{n_0} x$. Gilt ${}_\mu A x = A^{n_0} x$ für alle $\mu < \lambda =$ Limeszahl, so folgt aus Satz 1 wieder ${}_\lambda A x = A^{n_0} x$. Folglich ist auch ${}_* A x = A^{n_0} x$. Aus der Voraussetzung des Satzes folgt dann $A^{n_0} x = 0$ und somit erst recht ${}_\omega A x = 0$. $x \in \mathfrak{M}$ war beliebig, es ist also ${}_\omega A \, \mathfrak{M} = 0$, d.h. ${}_\omega A \cdot R < L$. Daraus ergibt sich die Behauptung.

Zwei Folgerungen aus Satz 11:

(13) *Ist R i.e.S. l.k. mit Einselement, so folgt aus ${}_* A = 0$ stets* $\bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}^i = 0$.

(14) *Ist R i.e.S. l.k. und das Radikal N von R kommutativ, so ist* $\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{N}^i\right) R = 0$, *insbesondere also $N_{\omega+1} = 0$.*

Da N kommutativ ist, gilt nämlich ${}_\mu N = N_\mu$ für jedes μ, also nach Satz 9 ${}_* N = N_* = 0$. Für kommutative i.e.S. l.k. Ringe mit 1 folgt aus (14): $\bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{N}^i = 0$.

Schließlich können wir noch zeigen:

(15) *Hat R ein Basisfilter aus zweiseitigen Idealen, so ist die Vereinigung aller transfinit nilpotenten (r-nilpotenten) Linksideale ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal.*

Wegen (11) und (12) ist nur die Abgeschlossenheit der Vereinigung Q der (r-)nilpotenten Linksideale zu zeigen. Wir müssen beweisen, daß ein Häufungspunkt h von Q ein (r-)nilpotentes Ideal H erzeugt. Ist Z ein offenes zweiseitiges Ideal, so gibt es ein (r-)nilpotentes Ideal A aus R mit $h \in A + Z$, also $H < A + Z$ und erst recht $\underset{*}{H} < A + Z$ $(H_* < A + Z)$. Daraus folgt nach geläufigen Schlüssen $\underset{*}{H} < \underset{\mu}{A} + Z$ $(H_* < A_\mu + Z)$ für alle μ, also $\underset{*}{H} < \underset{*}{A} + Z = Z$ $(H_* < Z)$ und folglich $\underset{*}{H} = (H_* =) 0$.

Wir wollen nun die Struktur halbeinfacher linear kompakter Ringe untersuchen. Dabei wird sich herausstellen, daß die von uns benutzten Begriffe und Methoden geeignet sind, die von WEDDERBURN begonnene Theorie der halbeinfachen Ringe in gewisser Weise zum Abschluß zu bringen. Man kann die Wedderburnschen Strukturätze auffassen als eine vollständige Antwort auf die Frage, wie die endlichen direkten Summen voller Matrixringe endlichen Grades über Schiefkörpern axiomatisch gekennzeichnet sind. E. NOETHER ersetzte den Begriff *Matrixring endlichen Grades* durch den äquivalenten, aber invarianten Begriff *Ring aller linearen Transformationen eines Vektormoduls endlicher Dimension über einem Schiefkörper.* In der Noetherschen Fassung läßt sich die Beschränkung auf endliche Dimensionen leicht eliminieren. Wir wollen den Ring aller linearen Transformationen eines Vektormoduls beliebiger Dimension über einem Schiefkörper kurz als den *vollen Endomorphismenring* des Moduls bezeichnen. Wir können nun die oben gestellte Frage von ihren

beiden Einschränkungen (*endliche* direkte Summe voller Endomorphismenringe von Moduln *endlicher* Dimension) befreien und ganz allgemein fragen: *Wie sind die vollständigen direkten Summen voller Endomorphismenringe von Vektormoduln axiomatisch gekennzeichnet?* Die Antwort: *Es sind dies genau die (Jacobsonsch) halbeinfachen linear kompakten Ringe.* Insbesondere ist ein einfacher linear kompakter Ring, sofern er kein Radikalring ist, voller Endomorphismenring eines Vektormoduls über einem Schiefkörper. Schließlich zeigen wir noch, daß ein Ring genau dann halbeinfach ist, wenn er in einer direkten Summe voller Endomorphismenringe dicht liegt, d.h. wenn er dichter Unterring eines linear kompakten halbeinfachen Ringes ist.

Sei R_0 ein Ring linearer Transformationen des irreduziblen R_0-Moduls $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ ist in der diskreten Topologie bezüglich R_0 linear kompakt. Wie üblich zeigt man, daß der Ring Δ aller mit R_0 vertauschbaren Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ ein Schiefkörper ist. $\mathfrak{M}$ ist Vektormodul über Δ und R_0 besteht aus linearen Transformationen von $\mathfrak{M}$. Der Ring R aller mit Δ vertauschbaren Endomorphismen, d.h. der Ring aller linearen Transformationen von $\mathfrak{M}$ ist nach Satz 7 ein linear kompakter topologischer Ring. Nach einem fundamentalen Satz von Jacobson ist R_0 dichter Unterring von R ([2], Theorem 6). Algebraisch ausgedrückt bedeutet das folgendes: Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezüglich Δ linear unabhängige Elemente aus $\mathfrak{M}$ und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ irgendwelche Elemente aus $\mathfrak{M}$, so gibt es stets ein $\sigma \in R_0$ mit $\sigma x_i = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Sei ξ ein von 0 verschiedenes Element aus R. Es gibt ein $z \in \mathfrak{M}$ mit $z' = \xi z \neq 0$. Zu $x \neq 0$, $y \in \mathfrak{M}$ gibt es Elemente $\sigma, \tau \in R$ mit $\tau x = z$ und $\sigma z' = y$, also $\sigma \xi \tau x = y$: Das zweiseitige Ideal $R\xi R$ wirkt transitiv auf $\mathfrak{M}$, d.h. $\mathfrak{M}$ ist bezüglich $R\xi R$ irreduzibel. Folglich liegt $R\xi R$ nach Jacobson in R dicht, d.h. das von ξ in R erzeugte zweiseitige Ideal ist gleich R. Damit ist gezeigt, daß R einfach ist, d.h. außer R und 0 keine abgeschlossenen zweiseitigen Ideale enthält.

Sei nun R ein einfacher l.k. Ring und kein Radikalring. R enthält ein nicht q.r. Element a. Die Abbildung $x \to x + xa$ ist ein stetiger R-Endomorphismus von R auf das Linksideal A aller $x + xa$. Wegen (2) ist A abgeschlossen. Da a nicht q.r. ist, liegt es nicht in A, es gibt also ein offenes Oberideal und somit auch ein maximales offenes Oberideal L von A mit $a \notin L$. Ist L' Oberideal von L, so folgt $a \in L'$, also wegen $A \subset L'$ für jedes $x \in R$: $x = (x + xa) - xa \in L'$, d.h. es ist $L' = R$. Folglich ist L maximales Unterideal von R (vgl. hierzu [1], 9). Der Faktormodul $\mathfrak{M} = R/L$ ist dann ein irreduzibler R-Modul. Der Anullator $H(\xi)$ eines Elementes $\xi = x + L$ aus $\mathfrak{M}$ besteht aus allen $y \in R$ mit $yx \in L$ und ist also ein offenes Ideal. Daraus folgt, daß der Annulator $N = \bigcap_{\xi} H(\xi)$ von $\mathfrak{M}$ ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal ist, es muß also $N = 0$ oder $N = R$ sein. $N = R$ bedeutet $R^2 \subset L$, also $\overline{R^2} \subset L$, und folglich wegen der Einfachheit $R^2 = 0$. Das ist aber nicht möglich, denn R sollte kein Radikalring sein. Folglich ist R ein Endomorphismenring von $\mathfrak{M}$, d.h. $\mathfrak{M}$ ein Vektormodul über einem Schiefkörper und R dichter Ring linearer Transformationen. Wir können annehmen, daß die Topologie von

R eine gröbste ist. Da der von den Durchschnitten der in R offenen Ideale $H(\xi)$ gebildete Filter $\boldsymbol{B}$ eine l.k. Topologie erzeugt, muß diese mit der in R vorhandenen identisch sein. $\boldsymbol{B}$ erzeugt in R aber genau diejenige, die in R als Unterring des Ringes $\tilde{R}$ aller linearen Transformationen von $\mathfrak{M}$ von der oben definierten Topologie von $\tilde{R}$ induziert wird. R ist l.k., also in $\tilde{R}$ abgeschlossen. Da R in $\tilde{R}$ dicht liegt, folgt $R=\tilde{R}$. Somit ist bewiesen:

Satz 12. *Ein einfacher linear kompakter Ring ohne Radikal ist voller Endomorphismenring eines Vektormoduls und umgekehrt.*

Satz 12 ist die allgemeine Fassung des ersten Wedderburnschen Strukturs atzes. Dem zweiten Wedderburnschen Struktursatz entspricht:

Satz 13. *Die halbeinfachen linear kompakten Ringe sind genau die vollständigen direkten Summen voller Endomorphismenringe von Vektormoduln über Schiefkörpern.*

Beweis. Sei $R=\sum_{\mu} R_{\mu}$ die direkte Summe der vollen Endomorphismenringe R_{μ}. Die R_{μ} sind einfache l.k. Ringe, mit der Tychonoffschen Topologie ist also auch R linear kompakt. Da der Durchschnitt der maximalen abgeschlossenen Linksideale aus R gleich 0 ist, ist auch R halbeinfach.

Sei nun R ein beliebiger halbeinfacher l.k. Ring und S ein abgeschlossenes von 0 verschiedenes zweiseitiges Ideal aus R. S enthält ein nicht l.q.r. Element s. Sei L ein maximales offenes Oberideal des abgeschlossenen Linksideals $\{x-xs\}_{x\in R}$. Der R-Modul $\mathfrak{M}=R/L$ ist irreduzibel und wegen $s^2\equiv s\not\equiv 0 \pmod{L}$ ist $S\mathfrak{M}\neq 0$. Wir haben also gezeigt:

(16) *Zu jedem abgeschlossenen zweiseitigen Ideal $S<R$ existiert ein von S nicht annullierter irreduzibler R-Modul.*

Ist $\mathfrak{M}$ ein irreduzibler R-Modul, so ist der Annulator T von $\mathfrak{M}$ ein maximales zweiseitiges abgeschlossenes Ideal mit einfachem Faktorring R/T. Sei Σ das System aller abgeschlossenen maximalen zweiseitigen Ideale aus R. Falls $Q=\bigcap_{S\in\Sigma} S\neq 0$ ist, gibt es nach (16) einen irreduziblen R-Modul $\mathfrak{M}$ mit $Q\mathfrak{M}\neq 0$. Der Annullator A von $\mathfrak{M}$ ist maximal, liegt also in Σ, folglich liegt Q in A. Das widerspricht jedoch $Q\mathfrak{M}\neq 0$. Deshalb muß $Q=0$ sein. Ist $\boldsymbol{S}$ der von Σ erzeugte Filter, also das System aller endlichen Durchschnitte maximaler zweiseitiger Ideale, so ist $\downarrow\boldsymbol{S}=0$. Da wir annehmen können, daß R mit gröbster l.k. Topologie versehen ist, gilt dann sogar $\lim \boldsymbol{S}=0$. Weil die Faktorringe R/S für $S\in\boldsymbol{S}$ i.e.S. l.k. sind, ist dann auch R i.e.S. l.k.

$S_1, S_2, \ldots, S_k\in\Sigma$ seien k verschiedene maximale zweiseitige Ideale aus R. Wir setzen

$$S=\bigcap_{i=1}^{k} S_i, \quad S^l=\bigcap_{i\neq l} S_i, \quad R/S_i=R_i', \quad R/S=R'.$$

(17) *Es ist $R'\cong R_1'\oplus R_2'\oplus\cdots\oplus R_k'$. Bei diesem Isomorphismus ist R_i' das Bild von S^i/S.*

Induktionsbeweis. Für $k=1$ stimmt (17). Wir nehmen an, unsere Behauptung stimmte für $k-1$. Dann ist $R/S^k \cong R_1' \oplus \cdots \oplus R_{k-1}'$, wobei R_i' das Bild von $\left(\bigcap_{j \neq i,\, k} S_j\right)/S^k$ ist. Liegt S^k in S_k, so ist S_k/S^k ein maximales Ideal von R/S^k. Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung von R/S^k muß dann also $S_k = S_i$ für ein $i<k$ sein, was ausgeschlossen war. Folglich ist $Q' = S^k/S \cong R_k'$ ein minimales zweiseitiges Unterideal von R'. Sei e die Eins aus Q' und $A' \subset R'$ der Annullator von Q'. A' ist abgeschlossen und aus $(Q' \cap A')^2 = 0$ folgt $Q' \cap A' = 0$. Wegen $x' = x' - x'e + x'e \in A' + Q'$ ist, zunächst algebraisch, $R' = A' \oplus Q'$ direkte Summe. Die Abbildung $x' \to (x' - x'e,\, x'e)$ von R' auf die topologisch-algebraisch direkte Summe $A' \oplus Q'$ ist stetig und da R' i.e.S. l.k. ist also auch offen. Folglich ist R' auch topologisch die direkte Summe von A' und Q'. Aus $A' \cong R'/Q' \cong R/S^k$ folgt nach Induktionsvoraussetzung $A' \cong R_1' \oplus R_2' \oplus \cdots \oplus R_{k-1}'$ und damit $R' \cong R_1' \oplus \cdots \oplus R_k'$. Aus der Eindeutigkeit der Zerlegung und der Maximalität von S_i/S in R' folgt, daß $\sum_{j \neq i} R_j'$ Bild von S_i, also R' Bild von $\bigcap_{i \neq l} S_i = S^l$ ist. Damit ist (17) bewiesen.

Sei nun $\Omega = \{R_\mu\}$ das System der einfachen Faktorringe der $S_\mu \in \Sigma$ und $x_\mu \in R_\mu$ das Bild von $x \in R$ modulo S_μ. Die Abbildung

$$x \to \varphi(x) = \sum_\mu x_\mu \in \tilde{R} = \sum_\mu R_\mu$$

von R auf die direkte Summe aller $R_\mu \in \Omega$ ist stetig, $\varphi(R)$ in $\tilde{R}$ also abgeschlossen. Ist für ein endliches Teilsystem $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$ der Indizes μ der $R_\mu \in \Omega$ $\tilde{R}_{\boldsymbol{\mu}}$ der Unterring aller $\sum_\mu x_\mu$ mit $x_\mu = 0$ für $\mu \in \boldsymbol{\mu}$, so folgt aus (17): $\tilde{R} = \tilde{R}_{\boldsymbol{\mu}} + \varphi(R)$. Daraus folgt $\tilde{R} = \varphi(R)$. $\varphi(x) = 0$ bedeutet $x \in S$ für alle $S \in \Sigma$, d.h. $x \in \downarrow \boldsymbol{S} = 0$, also $x = 0$. Folglich ist φ ein stetiger Isomorphismus von R auf $\tilde{R}$. Da R i.e.S. l.k. war, ist φ sogar topologisch. Damit ist Satz 13 bewiesen. Eine interessante Folgerung ist

Satz 14. *Ist R ein linear kompakter Ring mit dem Radikal N und A ein zweiseitiges Ideal aus R, so ist $A \cap N$ das Radikal von A und $(N+A)/A$ das Radikal von R/A.*

Beweis. $R' = R/N$ ist halbeinfach, also nach Satz 13 direkte Summe einfacher Ringe: $R' = \sum_\mu R_\mu'$. $A' = (A+N)/N$ ist ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in R', muß also Teilsumme der R_μ' sein: $A' = \sum_\mu{}^* R_\mu'$. Ist $R' = \sum_\mu{}^* R_\mu' \oplus \sum_\nu{}^{**} R_\nu'$, so folgt $R'/A' = \sum_\nu{}^{**} R_\nu'$. Wegen

$$R'/A' \cong R/(A+N) \cong (R/A)/\big((A+N)/A\big)$$

ist dieser letzte Faktorring also halbeinfach, so daß $(A+N)/A$ das Radikal von R/A enthalten muß. Aber andererseits liegt natürlich $(A+N)/A$ im Radikal. Folglich ist $(A+N)/A$ genau das Radikal von R/A. Da $(A+N)/N$ und $A/(A \cap N)$ algebraisch isomorph sind, ist $A/(A \cap N)$ halbeinfach, d.h. $A \cap N$ enthält das Radikal von A. Weil $A \cap N$ auch im Radikal liegt, folgt Gleichheit.

Wir denken uns nun irgendeinen (nicht topologischen) halbeinfachen Ring R gegeben. Sei $\boldsymbol{B}$ der Filter aller endlichen Durchschnitte maximaler Linksideale. Nach JACOBSON [1] ist $\bigcap_{B \in \boldsymbol{B}} B = 0$. Ist $L = L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_n \in \boldsymbol{B}$ Durchschnitt der maximalen Linksideale L_i, so ist $R \supset L_1 \supset L_1 \cap L_2 \supset \cdots \supset L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_n = L \pmod{L}$ eine Kompositionsreihe endlicher Länge des Faktormoduls R/L, für die Oberideale von L gilt also die Minimalbedingung. Sei $x \in R$, L und L_i wie bisher. Nach JACOBSON ist das Ideal H_i aller $z \in R$ mit $zx \in L_i$ in R maximal, liegt also in $\boldsymbol{B}$. Ist $H = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$, so gilt $Hx \subset L_i$ für alle i, also $Hx \subset \bigcap_i L_i = L$. Somit existiert zu jedem $L \in \boldsymbol{B}$ und $x \in R$ ein $H \in \boldsymbol{B}$ mit $Hx \in L$, d.h. $\boldsymbol{B}$ induziert in R eine lineare Ringtopologie. Die vollständige Hülle $\tilde{R}$ von R ist ein linear kompakter R-Modul und ein linear topologischer Ring (vgl. BOURBAKI, Topologie generale ch. III, § 5).

Sei z.B. $\tilde{x} \in \tilde{R}$ und $\tilde{L} \in \tilde{\boldsymbol{B}}$ = Basisfilter von $\tilde{R}$. $\tilde{L}$ ist die abgeschlossene Hülle eines $L \in B$. Es existiert ein $x \in R$ mit $x = \tilde{x} \pmod{\tilde{L}}$. Alle $z \in R$ mit $zx \in L \subset \tilde{L}$ bilden ein offenes Linksideal H. Aus $Hx \equiv H\tilde{x} \pmod{\tilde{L}}$ folgt für die abgeschlossene Hülle $\tilde{H} \in \tilde{\boldsymbol{B}}$ von H: $\tilde{H}\tilde{x} \subset \tilde{L}$. Daraus folgt die Stetigkeit der Rechtsmultiplikation.

Wir haben also R dicht eingebettet in einen l.k. Ring $\tilde{R}$. Die offenen Linksideale $\tilde{L} \in \tilde{\boldsymbol{B}}$ sind die in $\tilde{R}$ abgeschlossenen Hüllen der $L \in \boldsymbol{B}$. Ist L in R maximal und $\tilde{L}$ die Hülle von L in $\tilde{R}$, so sind R/L und $\tilde{R}/\tilde{L}$ isomorphe R-Moduln, also ist $\tilde{L}$ in $\tilde{R}$ ebenfalls maximal. Da in R der Durchschnitt der maximalen Linksideale verschwindet, muß auch in $\tilde{R}$ der Durchschnitt der abgeschlossenen maximalen Linksideale verschwinden, d.h. $\tilde{R}$ ist ebenfalls halbeinfach.

Nun sei umgekehrt R_0 ein dichter Unterring des halbeinfachen l.k. Ringes $R = \sum_\mu R_\mu$, R_μ voller Endomorphismenring eines Vektormoduls. Mit R^λ bezeichnen wir das maximale zweiseitige Ideal aller $\sum_\mu x_\mu \in R$ mit $x_\lambda = 0$. Es ist dann $R/R^\lambda \cong R_\lambda$ und

$$(R_0 + R^\lambda)/R^\lambda \cong R_0/(R_0 \cap R^\lambda).$$

Aus der Voraussetzung folgt, daß $(R_0 + R^\lambda)/R^\lambda$ dichter Unterring von R/R^λ ist. Nach JACOBSON ist also $(R_0 + R^\lambda)/R^\lambda$ und damit auch $R_0/(R_0 \cap R^\lambda)$ ein primitiver, also halbeinfacher Ring. Wegen $\bigcap_\lambda (R_0 \cap R^\lambda) = 0$ ist dann R_0 ebenfalls halbeinfach. Wir haben also wegen Satz 13 gezeigt:

Satz 15. *Ein Ring ist dann und nur dann halbeinfach, wenn er dichter Unterring einer vollständigen Summe voller Endomorphismenringe von Vektormoduln ist.*

Dieser Satz ist eine Verschärfung des Jacobsonschen Satzes 28 in [1].

III. Hyperdirekte Zerlegungen.

Eine der Zerlegung eines l.k. halbeinfachen Ringes R in einfache Summanden R_μ entsprechende Zerlegung läßt sich in sehr allgemeiner Weise für

beliebige linear kompakte Operatormoduln durchführen. Die Zerlegung $R = \sum_{\mu} R_\mu$ hat eine bemerkenswerte Eigenschaft: Für jedes abgeschlossene Linksideal L aus R gilt nämlich $L = \sum_{\mu} L_\mu$ mit $L_\mu = L \cap R_\mu$. Es ist leicht zu sehen, daß die R_μ nicht mehr in ähnlicher Weise in Linksideale zerlegbar sind, d.h. ist $R_\mu = A \oplus B$ direkte Summe der von 0 verschiedenen abgeschlossenen Linksideale A und B, so existieren stets abgeschlossene Linksideale $C < R_\mu$, für welche $C \neq C \cap A \oplus C \cap B$ ist. Ähnlich liegen die Dinge bei den Prüferschen Gruppen. Eine Prüfersche Gruppe $\mathfrak{G}$ ist direkte Summe ihrer primären Komponenten: $\mathfrak{G} = \sum_{p} \mathfrak{G}_p$. Für jede abgeschlossene Untergruppe $\mathfrak{A} < \mathfrak{G}$ gilt $\mathfrak{A} = \sum_{p} (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{G}_p)$. Die $\mathfrak{G}_p$ sind nicht mehr in entsprechender Weise weiter zerlegbar. Diese Beispiele führen uns zu der folgenden Definition.

Wir gehen aus von einem beliebigen vollständigen linear topologischen Modul $\mathfrak{M}$, zu dem eine Menge Λ hyperstetiger Endomorphismen als Linksoperatorenbereich und eine Menge Θ von beliebigen, nicht notwendig stetigen Rechtsmultiplikatoren gegeben seien. Wir bezeichnen die abgeschlossenen Λ- (Θ-) zulässigen Untermoduln als Λ- (Θ-) Untermoduln, die abgeschlossenen Λ- und Θ-zulässigen Untermoduln als (Λ, Θ)-Untermoduln. Von Λ und Θ setzen wir zunächst weiter nichts voraus, wir lassen z.B. auch zu, daß Λ oder Θ oder auch beide Bereiche leer sind. Eine algebraisch-topologische Zerlegung

$$\mathfrak{M} = \sum_{\mu} \mathfrak{M}_\mu \tag{18}$$

von $\mathfrak{M}$ in eine direkte Tychonoffsche Summe von (Λ, Θ)-Untermoduln $\mathfrak{M}_\mu$ heiße *(Λ, Θ)-hyperdirekt* oder, falls über Λ und Θ kein Zweifel herrscht, kurz *hyperdirekt*, wenn jeder Λ-Untermodul $\mathfrak{N} < \mathfrak{M}$ direkte Summe der Λ-Untermoduln $\mathfrak{N}_\mu = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_\mu$ ist. $\mathfrak{M}$ heiße *massiv*, wenn es keine mehrgliedrige hyperdirekte Zerlegung von $\mathfrak{M}$ gibt.

Wir beweisen zunächst einige sehr einfache Eigenschaften hyperdirekter Zerlegungen.

(19) *Sind die Zerlegungen*

$$\mathfrak{M} = \sum_{\mu} \mathfrak{A}_\mu \qquad \mathfrak{M} = \sum_{\nu} \mathfrak{B}_\nu$$

von $\mathfrak{M}$ hyperdirekt, so auch die Zerlegung

$$\mathfrak{M} = \sum_{\mu,\nu} \mathfrak{C}_{\mu\nu} \quad \textit{mit} \quad \mathfrak{C}_{\mu\nu} = \mathfrak{A}_\mu \cap \mathfrak{B}_\nu.$$

Beweis. Es ist $\mathfrak{A}_\mu = \sum \mathfrak{C}_{\mu\nu}$, also $\mathfrak{M} = \sum \mathfrak{C}_{\mu\nu}$. Ist $\mathfrak{L}$ ein Λ-Untermodul, so ist $\mathfrak{L} = \sum_{\mu} (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{A}_\mu)$ und $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{A}_\mu = \sum_{\nu} (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{A}_\mu \cap \mathfrak{B}_\nu) = \sum_{\nu} (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{C}_{\mu\nu})$, folglich $\mathfrak{L} = \sum_{\mu,\nu} (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{C}_{\mu\nu})$.

Aus (19) folgt unmittelbar:

(20) *Eine hyperdirekte Zerlegung in massive (Λ, Θ)-Untermoduln ist bis auf die Reihenfolge der Summanden eindeutig.*

Wir bemerken, daß keineswegs jeder Modul $\mathfrak{M}$ hyperdirekt in massive Summanden zerlegbar zu sein braucht. Beispiel: $\mathfrak{M}$ sei diskreter Vektormodul unendlicher Dimension über einem Körper K und $\mathfrak{a} = \{a_\mu\}$ eine K-Basis von $\mathfrak{M}$. Für jede Teilmenge $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ haben wir eine Zerlegung

$$(*) \qquad \mathfrak{M} = \sum_{a_\nu \in \mathfrak{b}} a_\nu K \oplus \sum_{a_\mu \in \mathfrak{a} - \mathfrak{b}} a_\mu K$$

und eine Projektion $\pi_\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{M}$ auf $\sum_{a_\nu \in \mathfrak{b}} a_\nu K$. Λ sei die Menge dieser Projektionen und Θ sei gleich K. Die Zerlegung $(*)$ ist für jedes $\mathfrak{b}$ hyperdirekt. Es ist leicht zu sehen, daß die einzigen massiven Untermoduln die einrangigen Moduln $a_\mu K$ sind. Da $\mathfrak{M}$ unendliche Dimension haben sollte, kann es nicht zugleich algebraische und vollständige direkte Summe der $a_\mu K$ sein.

(21) *$\mathfrak{M} = \sum_\mu \mathfrak{M}_\mu$ und $\mathfrak{M}'$ seien (Λ, Θ)-Moduln, die Zerlegung von $\mathfrak{M}$ sei hyperdirekt. Ist φ ein stetiger, offener (Λ, Θ)-Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}'_\mu = \varphi(\mathfrak{M}_\mu)$, so ist $\mathfrak{M}' = \sum_\mu \mathfrak{M}'_\mu$ hyperdirekte Summe der $\mathfrak{M}'_\mu$.*

Für den Kern $\mathfrak{K}$ von φ gilt: $\mathfrak{K} = \sum_\mu \mathfrak{K}_\mu$ mit $\mathfrak{K}_\mu = \mathfrak{K} \cap \mathfrak{M}_\mu$, also $\mathfrak{M}/\mathfrak{K} \cong \sum_\mu (\mathfrak{M}_\mu/\mathfrak{K}_\mu)$. Diese Zerlegung ist hyperdirekt. Wegen $\mathfrak{M}' = \varphi(\mathfrak{M}) \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{K}$ ist dann auch $\mathfrak{M}'$ hyperdirekt zerlegt: $\mathfrak{M}' = \sum \mathfrak{M}'_\mu$. Hierbei ist offensichtlich $\mathfrak{M}'_\mu = \varphi(\mathfrak{M}_\mu) \cong \mathfrak{M}_\mu/\mathfrak{K}_\mu$.

Satz 16. *Sei $\mathfrak{M}$ ein linear topologischer (Λ, Θ)-Modul und $\boldsymbol{A}$ ein Filter abgeschlossener (Λ, Θ)-Untermoduln von $\mathfrak{M}$. Hat $\boldsymbol{A}$ folgende Eigenschaften:*

1. $\lim \boldsymbol{A} = 0$.
2. *Jeder Filter aus Restklassen aller $\mathfrak{A} \in \boldsymbol{A}$ konvergiert.*
3. *Jeder Faktormodul $\mathfrak{M}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \in \boldsymbol{A}$, ist hyperdirekt in massive Summanden zerlegbar,*

so ist $\mathfrak{M}$ selbst hyperdirekt in massive Summanden zerlegbar.

Wir bemerken, daß 2. aus 1. folgt, falls $\mathfrak{M}$ vollständig ist. Zum *Beweis* von Satz 16 indizieren wir die $\mathfrak{A} \in \boldsymbol{A}$ mit den Elementen einer gerichteten Menge I: Zu $\mu, \nu \in I$ sei $\mathfrak{A}_\mu, \mathfrak{A}_\nu \in \boldsymbol{A}$ und $\mu < \nu$ sei mit $\mathfrak{A}_\mu < \mathfrak{A}_\nu$ gleichbedeutend. Ferner setzen wir $\mathfrak{M}_\mu = \mathfrak{M}/\mathfrak{A}_\mu$. Ist $\mu < \nu$, so gibt es einen kanonischen stetigen und offenen (Λ, Θ)-Homomorphismus $h_{\nu\mu}$ von $\mathfrak{M}_\mu$ auf $\mathfrak{M}_\nu$. Ist

$$(*) \qquad \mathfrak{M}_\mu = \sum_\sigma \mathfrak{H}_{\mu\sigma}$$

die eindeutige hyperdirekte Zerlegung von $\mathfrak{M}_\mu$ in massive Summanden, so ist

$$(**) \qquad \mathfrak{M}_\nu = h_{\nu\mu}(\mathfrak{M}_\mu) = \sum_\sigma h_{\nu\mu}(\mathfrak{H}_{\mu\sigma})$$

nach (21) eine hyperdirekte Zerlegung von $\mathfrak{M}_\nu$. Die Zerlegung $(*)$ von $\mathfrak{M}_\nu$ in massive Summanden erhalten wir aus $(**)$, indem wir die $h_{\nu\mu}(\mathfrak{H}_{\mu\sigma})$ weiter in massive Summanden zerlegen. Wir teilen nun die $\mathfrak{H}_{\mu\sigma}$ der Zerlegung $(*)$ in Äquivalenzklassen ein: Es sei $\mathfrak{H}_{\mu\sigma} \sim \mathfrak{H}_{\mu\tau}$ dann und nur dann, wenn ein $\lambda < \mu$

existiert, für welches mit passendem ϱ gilt:

$$\mathfrak{H}_{\mu\sigma} + \mathfrak{H}_{\mu\tau} < h_{\mu\lambda}(\mathfrak{H}_{\lambda\varrho}).$$

Reflexivität und Symmetrie der Beziehung liegt auf der Hand. Sie ist auch transitiv: Sei $\mathfrak{H}_{\mu\alpha} \sim \mathfrak{H}_{\mu\beta}$ und $\mathfrak{H}_{\mu\beta} \sim \mathfrak{H}_{\mu\gamma}$. Es gibt ein $\mathfrak{H}_{\lambda\varrho}$ und ein $\mathfrak{H}_{\varkappa\tau}$ mit $\mathfrak{H}_{\mu\alpha} + \mathfrak{H}_{\mu\beta} < h_{\mu\lambda}(\mathfrak{H}_{\lambda\varrho})$ und $\mathfrak{H}_{\mu\beta} + \mathfrak{H}_{\mu\gamma} < h_{\mu\varkappa}(\mathfrak{H}_{\varkappa\tau})$. Sei $\iota \in I$ mit $\iota < \lambda, \varkappa$. Es existiert ein $\mathfrak{H}_{\iota\delta}$ und ein $\mathfrak{H}_{\iota\varepsilon}$ der (*)-Zerlegung von $\mathfrak{M}_\iota$ mit $\mathfrak{H}_{\lambda\varrho} < h_{\lambda\iota}(\mathfrak{H}_{\iota\delta})$ und $\mathfrak{H}_{\varkappa\tau} < h_{\varkappa\iota}(\mathfrak{H}_{\iota\varepsilon})$. Nun gilt allgemein $h_{\alpha\beta} h_{\beta\gamma} = h_{\alpha\gamma}$, also:

$$\mathfrak{H}_{\mu\beta} < h_{\mu\lambda}(\mathfrak{H}_{\lambda\varrho}) < h_{\mu\lambda} h_{\lambda\iota}(\mathfrak{H}_{\iota\delta}) = h_{\mu\iota}(\mathfrak{H}_{\iota\delta})$$

und entsprechend $\mathfrak{H}_{\mu\beta} < h_{\mu\iota}(\mathfrak{H}_{\iota\varepsilon})$. Daraus folgt aber wegen (21): $\mathfrak{H}_{\iota\delta} = \mathfrak{H}_{\iota\varepsilon}$, also $\mathfrak{H}_{\mu\alpha} + \mathfrak{H}_{\mu\beta} + \mathfrak{H}_{\mu\gamma} < h_{\mu\iota}(\mathfrak{H}_{\iota\varepsilon})$. Wir fassen nun die äquivalenten Summanden der Zerlegung (*) zusammen zu Moduln $\mathfrak{Q}_{\mu\alpha}$. Dann ist

$$\mathfrak{M}_\mu = \sum_\alpha \mathfrak{Q}_{\mu\alpha}$$

und jedes $\mathfrak{Q}_{\mu\alpha}$ ist hyperdirekte Summe massiver Untermoduln einer Klasse äquivalenter.

Sei $\nu < \mu$. Es ist klar, daß entweder $h_{\mu\nu}(\mathfrak{Q}_{\nu\alpha}) = 0$ ist oder daß es genau ein α' mit $h_{\mu\nu}(\mathfrak{Q}_{\nu\alpha}) < \mathfrak{Q}_{\mu\alpha'}$ gibt. Sei umgekehrt $\mathfrak{H}_{\mu\varrho} < \mathfrak{Q}_{\mu\alpha'}$ und etwa $\mathfrak{H}_{\mu\sigma} < h_{\mu\nu}(\mathfrak{Q}_{\nu\alpha})$. Es gibt ein $\lambda < \nu$ und ein $\mathfrak{H}_{\lambda\tau}$ mit

$$\mathfrak{H}_{\mu\varrho} + \mathfrak{H}_{\mu\sigma} < h_{\mu\lambda}(\mathfrak{H}_{\lambda\tau}) = h_{\mu\nu} h_{\nu\lambda}(\mathfrak{H}_{\lambda\tau}).$$

Wegen

$$\mathfrak{H}_{\mu\sigma} < h_{\mu\nu}(\mathfrak{Q}_{\nu\alpha}) \cap h_{\mu\nu}\big(h_{\nu\lambda}(\mathfrak{H}_{\lambda\tau})\big)$$

ist $\mathfrak{Q}_{\nu\alpha} \cap h_{\nu\lambda}(\mathfrak{H}_{\lambda\tau}) \neq 0$, also $h_{\nu\lambda}(\mathfrak{H}_{\lambda\tau}) < \mathfrak{Q}_{\nu\alpha}$ und folglich $\mathfrak{H}_{\mu\varrho} < h_{\mu\nu}(\mathfrak{Q}_{\nu\alpha})$, d.h.: Entweder ist $h_{\mu\nu}(\mathfrak{Q}_{\nu\alpha}) = 0$ oder es gibt ein α' mit $h_{\mu\nu}(\mathfrak{Q}_{\nu\alpha}) = \mathfrak{Q}_{\mu\alpha'}$.

$\mathfrak{Q}_{\mu\alpha}$ ist Faktorgruppe modulo $\mathfrak{A}_\mu \in \boldsymbol{A}$, es existiert also ein abgeschlossener Untermodul $\mathfrak{P}_{\mu\alpha} < \mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{Q}_{\mu\alpha} = \mathfrak{P}_{\mu\alpha}/\mathfrak{A}_\mu$. Mit Hilfe dieser $\mathfrak{P}_{\mu\alpha}$ können wir unsere Ergebnisse auch so formulieren:

(22) *Für jedes $\mu \in I$ ist hyperdirekt*

$$\mathfrak{M}/\mathfrak{A}_\mu = \sum_\alpha \mathfrak{P}_{\mu\alpha}/\mathfrak{A}_\mu.$$

Ist $\nu < \mu$, so gibt es zu jedem $\mathfrak{P}_{\mu\alpha}$ genau ein $\mathfrak{P}_{\nu\alpha}$ mit

$$\mathfrak{P}_{\mu\alpha} = \mathfrak{P}_{\nu\alpha} + \mathfrak{A}_\mu.$$

Die restlichen $\mathfrak{P}_{\nu\beta}$ liegen alle in $\mathfrak{A}_\mu$.

Wir können nun auch die $\mathfrak{P}_{\mu\alpha}$ in Äquivalenzklassen einteilen: $\mathfrak{P}_{\mu\alpha} \sim \mathfrak{P}_{\nu\beta}$ bedeute Existenz eines $\mathfrak{P}_{\lambda\gamma}$ mit $\lambda < \mu, \nu$ und $\mathfrak{P}_{\mu\alpha} = \mathfrak{P}_{\lambda\gamma} + \mathfrak{A}_\mu$, $\mathfrak{P}_{\nu\beta} = \mathfrak{P}_{\lambda\gamma} + \mathfrak{A}_\nu$. Aus (22) folgt, daß hierdurch in der Tat eine Äquivalenzrelation definiert ist. Wir wollen alle $\mathfrak{P}_{\mu\alpha}$ einer Äquivalenzklasse mit demselben zweiten Index bezeichnen. Für jedes α sei

$$\mathfrak{P}_\alpha = \bigcap_{\mu \in I} \mathfrak{P}_{\mu\alpha}.$$

Die $\mathfrak{P}_\alpha$ sind abgeschlossene (Λ, Θ)-Untermoduln von $\mathfrak{M}$. Wir setzen

$$\widetilde{\mathfrak{M}} = \sum_\alpha \mathfrak{P}_\alpha$$

und behaupten:

1. $\mathfrak{M} \cong \widetilde{\mathfrak{M}}$ (algebraisch und topologisch).
2. Alle $\mathfrak{P}_\alpha$ sind massiv.
3. Die Zerlegung ist hyperdirekt.

Zu 1). Wir definieren einen Homomorphismus φ von $\mathfrak{M}$ in $\widetilde{\mathfrak{M}}$ (vgl. [7], Satz (2.10)): Sei $x \in \mathfrak{M}$. Für $\mu \in I$ ist

$$x \equiv \sum_\alpha x_{\mu\alpha} \qquad (\mathrm{mod}\, \mathfrak{A}_\mu).$$

Die Restklassen $\mathfrak{x}_{\mu\alpha} = x_{\mu\sigma} + \mathfrak{A}_\mu$ sind durch x für jedes α eindeutig bestimmt, liegen in $\mathfrak{P}_{\mu\alpha}$ und bilden ein Filter $\boldsymbol{C}_\alpha(x)$. Wegen Voraussetzung 2. aus Satz 16 existiert $x_\alpha = \lim \boldsymbol{C}_\alpha(x)$ und liegt in $\bigcap_\mu \mathfrak{P}_{\mu\alpha} = \mathfrak{P}_\alpha$. Durch

$$x \to \varphi(x) = \sum_\alpha x_\alpha$$

ist also eine Abbildung von $\mathfrak{M}$ in $\widetilde{\mathfrak{M}}$ definiert.

a) φ ist ein algebraischer (Λ, Θ)-Isomorphismus.

Aus $\varphi(x) = 0$ folgt $x_\alpha \in \mathfrak{A}_\mu$, also $x_{\mu\alpha} \in \mathfrak{A}_\mu$, also $x \in \mathfrak{A}_\mu$ für alle μ und wegen Satz 16,1. also $x = 0$. Die Homomorphieeigenschaft ist klar.

b) $\varphi(\mathfrak{M}) = \widetilde{\mathfrak{M}}$.

Sei $\tilde{x} = \sum_\alpha x_\alpha \in \widetilde{\mathfrak{M}}$. Für $\mathfrak{A}_\mu \in \boldsymbol{A}$ verstehen wir unter $\tilde{x} + \mathfrak{A}_\mu$ die Restklasse $\sum_\alpha{}^* x_\alpha + \mathfrak{A}_\mu$ aus $\mathfrak{M}$, wobei in $\sum^*$ über alle α mit $\mathfrak{P}_{\mu\alpha} \neq \mathfrak{A}_\mu$ summiert wird. Die $\tilde{x} + \mathfrak{A}_\mu$ bilden ein Filter $\boldsymbol{X}$, wegen 2. existiert also $\lim \boldsymbol{X} = x$. Offenbar ist $\varphi(x) = \tilde{x}$.

c) φ ist topologisch.

Sei $\widetilde{\mathfrak{U}} = \sum_\alpha \mathfrak{U}_\alpha$ eine Umgebung der 0 in $\widetilde{\mathfrak{M}}$. Fast alle Moduln $\mathfrak{U}_\alpha$ sind gleich $\mathfrak{P}_\alpha$, es existiert also ein offener Λ-Untermodul $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{P}_\alpha \subset \mathfrak{U}_\alpha$ für alle α. Ist $x \in \mathfrak{M}$ und $\varphi(x) = \sum_\alpha x_\alpha$, so setzen wir $\varphi_\alpha(x) = x_\alpha$. Für alle μ und α gilt $\varphi_\alpha(\mathfrak{U}) + \mathfrak{A}_\mu \subset \mathfrak{U} + \mathfrak{A}_\mu$, also wegen $\lim \boldsymbol{A} = 0$ auch $\varphi_\alpha(\mathfrak{U}) \subset \mathfrak{U}$. Daraus folgt

$$\varphi(\mathfrak{U}) \subset \sum_\alpha \varphi_\alpha(\mathfrak{U}) \subset \sum_\alpha (\mathfrak{U} \cap \mathfrak{P}_\alpha) \subset \sum_\alpha \mathfrak{U}_\alpha = \widetilde{\mathfrak{U}}.$$

Folglich ist φ stetig.

Sei $\mathfrak{U}$ ein offener Λ-Untermodul von $\mathfrak{M}$. Aus $\lim \boldsymbol{A} = 0$ folgt, daß $\mathfrak{U}$ ein $\mathfrak{A}_\mu \in \boldsymbol{A}$ enthält. Da $\mathfrak{U}/\mathfrak{A}_\mu$ in $\mathfrak{M}/\mathfrak{A}_\mu = \sum_\alpha \mathfrak{P}_{\mu\alpha}/\mathfrak{A}_\mu$ offen ist, liegen fast alle $\mathfrak{P}_{\mu\alpha}$, also erst recht fast alle $\mathfrak{P}_\alpha$ in $\mathfrak{U}$, so daß $\widetilde{\mathfrak{U}} = \sum_\alpha (\mathfrak{P}_\alpha \cap \mathfrak{U})$ in $\widetilde{\mathfrak{M}}$ offen ist. Sei

$\tilde{x} = \sum_\alpha x_\alpha \in \widetilde{\mathfrak{U}}$ und $\tilde{x} = \varphi(x)$ mit $x \in \mathfrak{M}$. Es folgt

$$x \equiv \sum x_\alpha \equiv 0 \quad \left(\mathrm{mod}\left(\sum_\alpha (\mathfrak{P}_{\mu\alpha} \cap \mathfrak{U})\right) + \mathfrak{A}_\mu\right),$$

d.h.

$$x \in \sum_\alpha (\mathfrak{P}_{\mu\alpha} \cap \mathfrak{U}) + \mathfrak{A}_\mu = \mathfrak{U}, \qquad \widetilde{\mathfrak{U}} \subset \varphi(\mathfrak{U}).$$

Folglich ist φ auch offen. Damit ist die Isomorphie von $\mathfrak{M}$ und $\widetilde{\mathfrak{M}}$ gezeigt.

Sei $\mathfrak{L}$ ein Λ-Untermodul von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{L}_\alpha = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{P}_\alpha$. Für jedes $\mathfrak{A} \in \boldsymbol{A}$ ist $\mathfrak{L} + \mathfrak{A} = \sum_\alpha \mathfrak{L}_\alpha + \mathfrak{A}$, also ist $\mathfrak{L} = \sum_\alpha \mathfrak{L}_\alpha$. Damit ist gezeigt, daß die Zerlegung hyperdirekt ist. Es bleibt zu zeigen, daß alle $\mathfrak{P}_\alpha$ massiv sind. Hierbei können wir uns auf den Fall $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}_\alpha$ beschränken, d.h. wir dürfen annehmen, daß für jedes $\mu \in I$ alle Summanden der Zerlegung $\mathfrak{M}_\mu = \sum_\alpha \mathfrak{H}_{\mu\alpha}$ äquivalent sind. Sei nun $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' \oplus \mathfrak{M}''$ hyperdirekt. Für jedes $\mathfrak{A}_\mu \in \boldsymbol{A}$ ist dann $\mathfrak{A}_\mu = \mathfrak{A}'_\mu \oplus \mathfrak{A}''_\mu$ und $\mathfrak{M}/\mathfrak{A}_\mu = \mathfrak{M}'/\mathfrak{A}'_\mu \oplus \mathfrak{M}''/\mathfrak{A}''_\mu = \mathfrak{M}'_\mu \oplus \mathfrak{M}''_\mu$. Falls $\mathfrak{M}'_\mu$ und $\mathfrak{M}''_\mu$ beide von Null verschieden wären, könnten wir ein $\nu < \mu$ und einen massiven Summanden $\mathfrak{H}_\nu$ von $\mathfrak{M}_\nu$ finden, mit $h_{\mu\nu}(\mathfrak{H}_\nu) \cap \mathfrak{M}'_\mu \neq 0$, $h_{\mu\nu}(\mathfrak{H}_\nu) \cap \mathfrak{M}''_\mu \neq 0$. Das ist aber nicht möglich, denn $\mathfrak{H}_\nu$ liegt entweder in $\mathfrak{M}'_\nu$ oder in $\mathfrak{M}''_\nu$. Folglich ist etwa $\mathfrak{M}''_\mu = 0$ für alle μ und somit auch $\mathfrak{M}'^\wedge = 0$, d.h. $\mathfrak{M}$ ist massiv. Damit ist Satz 16 vollständig bewiesen.

Genügt $\boldsymbol{A}$ statt $\lim \boldsymbol{A} = 0$ nur der schwächeren Bedingung $\downarrow \boldsymbol{A} = 0$, so können wir nicht auf die algebraisch-topologische Isomorphie von $\mathfrak{M}$ und $\widetilde{\mathfrak{M}}$ schließen. Wir können jedoch die Topologie von $\mathfrak{M}$ vergröbern, indem wir als neuen Basisfilter den Filter aller Λ-Untermoduln $\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{U}$, $\mathfrak{A}_\mu \in \boldsymbol{A}$, $\mathfrak{U}$ offener Λ-Untermodul, wählen. In dieser Topologie bleibt $\mathfrak{M}$ separiert und es gilt $\lim \boldsymbol{A} = 0$. Bezeichnen wir den gröber topologisierten Modul mit $\mathfrak{M}^*$, so ist $\mathfrak{M}^* \cong \widetilde{\mathfrak{M}}^*$. Die kanonische Abbildung ψ von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}^*$ ist stetig, die Abbildung $\varphi^* = \varphi\,\psi$ von $\mathfrak{M}$ auf $\widetilde{\mathfrak{M}}^*$ ist also ein stetiger Isomorphismus von $\mathfrak{M}$ auf eine hyperdirekte Summe massiver (Λ, Θ)-Moduln. Es ist aber zu beachten, daß im allgemeinen $\widetilde{\mathfrak{M}}^* \neq \widetilde{\mathfrak{M}}$ sein wird!

(23) *Ein diskreter l.k. (Λ, Θ)-Modul $\mathfrak{M}$ ist hyperdirekte Summe endlich vieler massiver Untermoduln.*

Ist $\mathfrak{M}$ massiv, so ist nichts zu beweisen. Andernfalls ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}'_1$ hyperdirekt. Falls beide Summanden die in (23) formulierte Eigenschaft haben, sind wir fertig. Sonst sei etwa $\mathfrak{M}'_1 = \mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{M}'_2$ usw. Wir erhalten eine Folge hyperdirekter Zerlegungen

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots \mathfrak{M}_k \oplus \mathfrak{M}'_k, \qquad \mathfrak{M}_i \neq 0.$$

Diese Folge muß schließlich zu einer Zerlegung in endlich viele massive Summanden führen, denn sonst enthielte $\mathfrak{M}$ die algebraische direkte Summe aller $\mathfrak{M}_i$, welche wegen der Diskretheit von $\mathfrak{M}$ abgeschlossen wäre. Nach gewohntem Schluß führt man das aber zum Widerspruch mit der linearen Kompaktheit von $\mathfrak{M}$.

Aus (23) und Satz 16 folgt sofort:

Satz 17. *Jeder linear kompakte (Λ, Θ)-Modul mit einem Basisfilter aus (Λ, Θ)-Untermoduln ist hyperdirekt in massive Untermoduln zerlegbar.*

Wir brauchen für $\boldsymbol{A}$ in Satz 16 nur ein Basisfilter von $\mathfrak{M}$ zu nehmen.

Nun sei $\mathfrak{M}$ ein Λ-Modul, $\emptyset$ die leere Menge und Θ ein System mit Λ vertauschbarer Rechtsoperatoren. Eine (Λ, Θ)-hyperdirekte Zerlegung von $\mathfrak{M}$ ist natürlich stets auch $(\Lambda, \emptyset)$-hyperdirekt, das umgekehrte braucht allgemein selbstverständlich nicht richtig zu sein. Sind jedoch alle Operatoren aus Θ stetig, so kann man auch die Umkehrung zeigen:

Satz 18. *$\mathfrak{M}$ sei ein (Λ, Θ)-Modul. Sind alle Operatoren aus Θ stetig, so ist jede $(\Lambda, \emptyset)$-hyperdirekte Zerlegung von $\mathfrak{M}$ auch (Λ, Θ)-hyperdirekt.*

Beweis. Sei $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2$ eine $(\Lambda, \emptyset)$-hyperdirekte Zerlegung von $\mathfrak{M}$ und π_i die Projektion von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}_i$. Die π_i sind stetig. Wir können annehmen, daß Θ ein Ring ist und die π_i enthält. Zu beweisen ist $\mathfrak{M}_i \Theta < \mathfrak{M}_i$ für $i = 1, 2$. Sei $\varrho \in \Theta$, $\sigma = \pi_1 + \pi_1 \varrho \pi_2 \in \Theta$ und $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}\sigma$. Wegen $\sigma^2 = \sigma$ ist $\mathfrak{A}$ der Modul aller $z \in \mathfrak{M}$ mit $z = z\sigma$; da σ stetig ist, ist $\mathfrak{A}$ also abgeschlossen. Aus $\mathfrak{M}_2 \sigma = \mathfrak{M} \pi_2 \sigma = 0$ folgt $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{M}_2 = 0$. Wegen $\mathfrak{A} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{A} \cap \mathfrak{M}_2$ liegt $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{M}_1$, aus der direkten Zerlegung $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2$ folgt also für jedes $x_1 \in \mathfrak{M}_1$: $x_1 \varrho \pi_2 = x_1 \pi_1 \varrho \pi_2 = 0$, d.h.

$$\mathfrak{M}_1 \varrho = \mathfrak{M}_1 \varrho (\pi_1 + \pi_2) < \mathfrak{M}_1 \varrho \pi_1 + \mathfrak{M}_1 \varrho \pi_2 = \mathfrak{M}_1 \varrho \pi_1 < \mathfrak{M}_1 .$$

Folglich ist $\mathfrak{M}_1$ Θ-invariant.

Sei nun $\mathfrak{M} = \sum_{\mu} \mathfrak{M}_\mu$ eine beliebige $(\Lambda, \emptyset)$-hyperdirekte Zerlegung von $\mathfrak{M}$. Setzen wir $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_\lambda$, $\mathfrak{M}_2 = \sum_{\mu \neq \lambda} \mathfrak{M}_\mu$, so ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2$ eine $(\Lambda, \emptyset)$-hyperdirekte Zerlegung von $\mathfrak{M}$, nach dem eben bewiesenen ist $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_\lambda$ also Θ-invariant. Folglich sind alle Summanden $\mathfrak{M}_\mu$ (Λ, Θ)-Untermoduln, d.h. die Zerlegung ist (Λ, Θ)-hyperdirekt. Damit ist der Satz bewiesen.

Wenden wir Satz 17 und Satz 18 auf l.k. Ringe an, so erhalten wir:

Satz 19. *Ein linear kompakter Ring R ist in genau einer Weise vollständige hyperdirekte Summe massiver zweiseitiger Ideale R_μ:*

$$R = \sum_{\mu} R_\mu .$$

Enthält R eine Eins, so sind die Ideale R_μ zweiseitig unzerlegbar, d.h. in einer direkten Zerlegung $R_\mu = A \oplus B$ in abgeschlossene zweiseitige Ideale A und B muß ein Summand verschwinden.

Beweis. Nach Satz 17 ist R mit $\Lambda = R$ eine $(\Lambda, \emptyset)$-hyperdirekte Summe massiver Summanden R_μ, d.h. R ist hyperdirekte Summe von Linksidealen R_μ. Die Rechtsmultiplikationen eines topologischen Ringes sind stetig, setzen wir also $\Theta = R$, so folgt aus Satz 18, daß die Zerlegung auch (Λ, Θ)-hyperdirekt ist, d.h. die R_μ sind zweiseitige Ideale. Enthält R ein Einselement e, so ist $e = \sum_{\mu} e_\mu$, wobei e_μ das Einselement des Summanden R ist. Aus einer direkten Zerlegung $R_\mu = A \oplus B$ in zweiseitige Ideale folgt $e_\mu = e'_\mu + e''_\mu$ mit

Zentrumsidempotenten e'_μ, e''_μ. Ist L ein Linksideal aus R_μ, so folgt $L = Le'_\mu \oplus Le''_\mu = L \cap A \oplus L \cap B$, d.h. die Zerlegung von R_μ ist hyperdirekt. Da R_μ massiv ist, muß dann A oder B verschwinden.

Literatur.

[1] Jacobson, N.: The radical and semi-simplicity for arbitrary rings. Amer. J. Math. **67**, 300—320 (1945). — [2] Jacobson, N.: Structure theory of simple rings without finiteness assumptions. Trans. Amer. Math. Soc. **57**, 228—245 (1945). — [3] Jacobson, N.: On the theory of primitive rings. Ann. of Math. **48**, 8—21 (1947). — [4] Kaplansky, I.: Topological rings. Amer. J. Math. **69**, 153—183 (1947). — [5] Krull, W.: Galoissche Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen. Math. Ann. **100**, 687—698 (1928). — [6] Lefschetz, S.: Algebraic Topology. New York 1942. — [7] Leptin, H.: Über eine Klasse linear kompakter abelscher Gruppen I, II. Abh. Math. Sem. Hamb. **19**, 23—40 221—243 (1954). — [8] Prüfer, H.: Theorie der abelschen Gruppen. Teil I: Math. Z. **20**, 165—187 (1924); Teil II: Math. Z. **22**, 222—249 (1925). — [9] Zelinsky, D.: Linearly compact modules and rings. Amer. J. Math. **75**, 79—90 (1953).

Hamburg 13, St. Benedictstr. 30.

(Eingegangen am 12. Dezember 1954.)

KARZEL, H.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 268—291 (1955).

Ordnungsfunktionen in nichtdesarguesschen projektiven Geometrien.

Von
HELMUT KARZEL.

Der Begriff der *Ordnungsfunktion* ist schon von E. SPERNER [5][1]) für beliebige Räume eingeführt worden, aber bisher in der Hauptsache nur in desarguesschen Geometrien gebraucht worden. Andererseits legt gerade die Allgemeinheit dieses Begriffes Formulierung und Untersuchung von Anordnungseigenschaften in allgemeineren Geometrien nahe. Dieser Aufgabe soll die vorliegende Note hinsichtlich einer ebenen projektiven Geometrie Π, für die nur die üblichen projektiven Existenz- und Verknüpfungsaxiome, aber keine Schnittpunktsätze (auch nicht der Satz von DESARGUES oder Spezialfälle davon) vorausgesetzt werden, dienen. Als Ordnungsfunktion einer solchen Ebene Π bezeichnen wir jede nur die Werte $0, +1, -1$ annehmende Funktion $h(\alpha)$ der zwei Veränderlichen h (= Gerade) und α (= Punkt), die den Wert 0 genau dann annimmt, wenn h und α inzidieren. Von all diesen Ordnungsfunktionen wollen wir aber nur diejenigen betrachten, die der *Geradenrelation* genügen, d.h. der Forderung: Sind α, β, γ drei beliebige voneinander verschiedene Punkte einer Geraden g und h, k zwei Geraden $\neq g$, die mit γ inzidieren, so soll stets $h(\alpha)\, h(\beta)\, k(\alpha)\, k(\beta) = +1$ gelten.

Zunächst werden in Anlehnung an die zitierte Arbeit von SPERNER [5] drei grundlegende Anordnungssätze bewiesen, deren Beweis bisher nur mit Hilfe von Schnittpunktsätzen erbracht worden war (vgl. § 1). Diese Sätze gestatten die in [5] entwickelte Theorie auf *nichtdesarguessche* Geometrien zu übertragen. Von Interesse dürften hierbei auch einige Anordnungsaussagen sein, die sich in desarguesschen Geometrien gar nicht formulieren lassen, da in diesen immer gewisse der beteiligten Elemente zusammenfallen.

In § 2 wird der nach M. HALL [1] zu jeder projektiven Ebene als Koordinatenbereich gehörige *ternäre Ring* — hier etwas anders als bei HALL definiert — herangezogen und die Frage nach den „*Anordnungen*" gestellt, die von den Ordnungsfunktionen der Geometrie im ternären Ring induziert werden.

Einige Eigenschaften dieser Anordnungen werden hergeleitet (§ 3) und umgekehrt wird gezeigt, wie man mit Hilfe gewisser Anordnungen Ordnungsfunktionen erzeugen kann, die jedoch nicht der Geradenrelation zu genügen

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf die Nummern des Literaturverzeichnisses auf S. 291.

brauchen. Die Hauptaufgabe dieser Note, nämlich die vollständige Kennzeichnung dieser Anordnungen, d.h. die Herleitung derjenigen ihrer Eigenschaften, welche genau der Geradenrelation entsprechen, erfolgt in § 4.

Im § 5 schließlich werden die sog. *einfachen* Ordnungsfunktionen[2]) betrachtet. Ihre Eigenschaften, die im Falle einer desarguesschen Geometrie bekannt sind, lassen sich auch an nichtdesarguesschen Geometrien bestätigen, wozu zum Teil allerdings andere Beweismethoden benötigt werden.

§ 1. Allgemeine Anordnungsaussagen.

Mit Hilfe der Ordnungsfunktion $h(\alpha)$ mit Geradenrelation erklärt man für vier Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ einer Geraden j mit $\alpha, \beta \neq \gamma, \delta$ ein *Trennsymbol* $[\gamma, \delta | \alpha, \beta]$, auch *Ordnungsfunktion zweiter Stufe* genannt, indem man

$$[\gamma, \delta | \alpha, \beta] = [g, h | \alpha, \beta] = g(\alpha)\, g(\beta)\, h(\alpha)\, h(\beta)$$

setzt, wobei g, h mit $g(\gamma) = h(\delta) = 0$ zwei beliebige Geraden $\neq j$ sind[3]).

Für dieses Trennsymbol gilt der nachfolgende Vertauschungssatz, der bisher nur unter Benutzung des Vierseitsatzes bewiesen wurde[3]). Er ist aber unabhängig davon, wie jetzt gezeigt werden soll.

Satz 1. $[\gamma, \delta | \alpha, \beta] = [\alpha, \beta | \gamma, \delta]$ *d.h.* $[g, h | \alpha, \beta] = [k, l | \gamma, \delta]$ *mit* $g(\gamma) = h(\delta) = k(\alpha) = l(\beta) = 0$.

Zum Beweise wenden wir die Geradenrelation (s. Fig. 1) siebenmal an:

$$\begin{aligned}
&g(\alpha)\ g(\tau)\ h'(\alpha)\ h'(\tau) = 1\\
&g(\beta)\ g(\tau)\ h(\beta)\ h(\tau) = 1\\
&h(\alpha)\ h(\gamma)\ h'(\alpha)\ h'(\gamma) = 1\\
&h(\sigma)\ h(\tau)\ h'(\sigma)\ h'(\tau) = 1\\
&k(\gamma)\ k(\sigma)\ h'(\gamma)\ h'(\sigma) = 1\\
&k(\delta)\ k(\sigma)\ l(\delta)\ l(\sigma) = 1\\
&h(\gamma)\ h(\sigma)\ l(\gamma)\ l(\sigma) = 1\,.
\end{aligned}$$

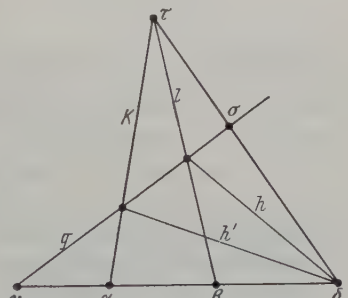

Fig. 1.

Durch Multiplikation dieser Gleichungen ergibt sich:

$$g(\alpha)\, g(\beta)\, h(\alpha)\, h(\beta) = k(\gamma)\, k(\delta)\, l(\gamma)\, l(\delta)\,, \text{ w. z. b. w.}$$

Von Bedeutung ist weiter ein Satz über *harmonische* Quadrupel, der in desarguesschen Geometrien eine Selbstverständlichkeit ist, hier aber eines eigenen Beweises bedarf.

Satz 2. *Für alle Quadrupel* $\gamma, \delta, \alpha, \beta$ *in harmonischer Lage ist der Wert des Trennsymbols* $[\alpha, \beta | \gamma, \delta]$ *derselbe.*

---

[2]) Siehe [6] S. 35.
[3]) Vgl. [5] S. 115 und 120.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ zwei Punktequadrupel in harmonischer Lage sind, $[\alpha, \beta|\gamma, \delta] = [\alpha', \beta'|\gamma', \delta']$ gilt. Dabei können wir annehmen, daß die Punkte α, β, γ und α', β', γ' perspektiv liegen.

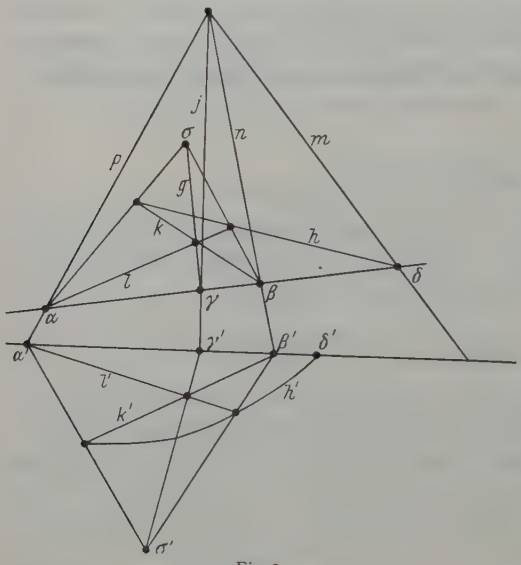

Fig. 2.

Auch hier ergibt sich der Beweis durch mehrmalige Anwendung der Geradenrelation (s. Fig. 2):

$$
\begin{array}{llll}
h(\alpha) & h(\sigma) & k(\alpha) & k(\sigma) = 1 \\
h(\beta) & h(\sigma) & l(\beta) & l(\sigma) = 1 \\
k(\sigma) & k(\gamma) & l(\sigma) & l(\gamma) = 1 \\
k(\alpha) & k(\gamma) & n(\alpha) & n(\gamma) = 1 \\
l(\beta) & l(\gamma) & p(\beta) & p(\gamma) = 1 \\
n(\gamma) & n(\gamma') & p(\gamma) & p(\gamma') = 1 \\
n(\alpha) & n(\alpha') & j(\alpha) & j(\alpha') = 1 \\
p(\beta) & p(\beta') & j(\beta) & j(\beta') = 1 \\
l'(\beta') & l'(\gamma') & p(\beta') & p(\gamma') = 1 \\
k'(\alpha') & k'(\gamma') & n(\alpha') & n(\gamma') = 1 \\
k'(\sigma') & k'(\gamma') & l'(\sigma') & l'(\gamma') = 1 \\
h'(\beta') & h'(\sigma') & l'(\beta') & l'(\sigma') = 1 \\
h'(\alpha') & h'(\sigma') & k'(\alpha') & k'(\sigma') = 1 .
\end{array}
$$

Multiplizieren wir wieder diese Gleichungen, so erhalten wir:

$$h(\alpha)\, h(\beta)\, j(\alpha)\, j(\beta) = h'(\alpha')\, h'(\beta')\, j(\alpha')\, j(\beta')$$

oder:

$$[\gamma, \delta|\alpha, \beta] = [\gamma', \delta'|\alpha', \beta'],$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Als unmittelbare Folgerung aus der eben bewiesenen Eigenschaft des Trennsymbols für harmonische Punktequadrupel erhalten wir den folgenden

Satz 3[4]). *In jeder projektiven Ebene lassen sich die Ordnungsfunktionen mit Geradenrelation in harmonische und anharmonische einteilen, je nachdem ob das Trennsymbol* $[\alpha, \beta|\gamma, \delta]$ *für harmonische Punktequadrupel* $+1$ *oder* -1 *ist.*

Wesentlich ist hier, daß der Satz 3 nunmehr auch ohne Voraussetzung des Satzes von DESARGUES bewiesen ist. Weiter folgt in derselben Allgemeinheit aus den Sätzen 2 und 3 auch die Gültigkeit der Sätze 14, 15 und 16 aus [5].

Jetzt wollen wir uns mit einer besonderen Art von Punktequadrupeln befassen, die wir *desarguessche* Quadrupel nennen. Darunter sollen vier Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ einer Geraden verstanden werden, von denen die ersten beiden α, β Schnittpunkte entsprechender Seiten zweier perspektiv liegender

[4]) Vgl. [5] S. 128.

Dreiecke sein sollen und die beiden anderen γ, δ durch die einander zugeordneten dritten Seiten bestimmt sind (s. Fig. 3).

In desarguesschen Geometrien ist stets $\gamma = \delta$, so daß dort die hier angestellten Betrachtungen sinnlos werden. Für desarguessche Quadrupel gilt nun folgender

Satz 4. *Für Punktequadrupel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in desarguesscher Lage ist das Trennsymbol $[\gamma, \delta | \alpha, \beta]$ stets gleich $+1$.*

Beweis. Zum Beweis betrachten wir Fig. 3 und wenden fünfmal die Geradenrelation an:

$$h(\alpha)\ h(\mu)\quad k_1(\alpha)\ k_1(\mu) = 1$$
$$h(\beta)\ h(\mu)\quad k_3(\beta)\ k_3(\mu) = 1$$
$$g(\alpha)\ g(\mu')\quad k_1(\alpha)\ k_1(\mu') = 1$$
$$g(\beta)\ g(\mu')\quad k_3(\beta)\ k_3(\mu') = 1$$
$$k_1(\mu)\, k_1(\mu')\quad k_3(\mu)\ k_3(\mu') = 1$$

Hieraus folgt:

$$h(\alpha)\ h(\beta)\quad g(\alpha)\ g(\beta) = 1$$

oder

$$[h, g | \alpha, \beta] = [\gamma, \delta | \alpha, \beta] = 1.$$

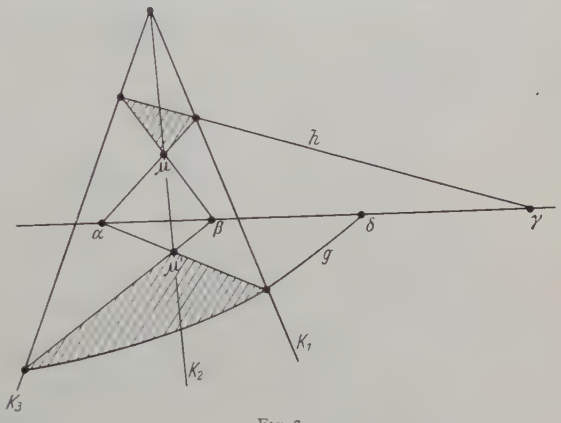

Fig. 3.

Wir können auch die Aussage des Satzes 4 als eine verallgemeinerte Geradenrelation auffassen, indem wir die Punkte γ, δ durch die Geraden g, h ersetzen und dann $h(\alpha)\, h(\beta)\, g(\alpha)\, g(\beta) = 1$ erhalten. Wie man leicht einsieht, ist auch diese verallgemeinerte Geradenrelation in sich dual.

Nun wenden wir uns einer gewissen Verallgemeinerung der Sätze 2 und 4 zu. Hierzu betrachten wir zwei *Hessenbergwürfe*[5]) $\alpha_{ik}, \alpha'_{ik}$ $(k > i = 1, 2, 3, 4)$ in der Lage (s. Fig. 4), daß fünf Punkte des einen Sechstupels zu fünf entsprechenden Punkten des anderen Sechstupels perspektiv liegen (in desarguesschen Geometrien läßt sich auch das sechste Punktepaar mit einer Geraden verbinden, die durch das Zentrum geht). Sind $\alpha_{ik}\,(+\alpha_{34} = \omega)$ und $\alpha'_{ik}\,(+\alpha'_{34} = \varrho')$ die zueinander perspektiv liegenden Punkte der beiden Hessenbergwürfe, so lassen sich folgende Relationen für das Trennsymbol beweisen:

$$(1)\quad [\omega, \alpha_{12} | \alpha_{24}, \alpha_{13}] = [\omega, \alpha_{12} | \alpha_{14}, \alpha_{23}] = [\varrho', \alpha'_{12} | \alpha'_{14}, \alpha'_{23}] = [\varrho', \alpha'_{12} | \alpha'_{24}, \alpha'_{13}]$$

$$(2)\quad [\omega, \varrho | \alpha_{ik}, \alpha_{jl}] = 1 \qquad (i, j = 1, 2;\ k, l = 3, 4),$$

wenn ϱ aus ϱ' durch die gegebene Perspektivität hervorgeht.

[5]) Dabei wollen wir als einen *Hessenbergwurf* jedes Sechstupel α_{ik} bezeichnen, das von einem vollständigen Viereck auf einer Geraden ausgeschnitten wird oder zu solch einem perspektiv ist (vgl. [2]). (In dem Lehrbuch von Veblen-Young: „Projective geometry I" wird ein derartiges Sechstupel als *quadrangular set* bezeichnet.) Numerieren wir die beiden Vierecke mit 1, 2, 3, 4 und 1′, 2′, 3′, 4′, so nennen wir zwei Punkte entsprechend, wenn sie von den Verbindungsgeraden (i, k) und (i', k') ausgeschnitten werden.

Beweis. Nach [5] Satz 9 sowie Satz 1 dieser Arbeit ergibt sich:

$$[\omega, \alpha_{12}|\alpha_{24}, \alpha_{13}] = [\omega, \alpha_{12}|\alpha_{14}, \alpha_{23}] = [\alpha_{14}, \alpha_{23}|\alpha_{24}, \alpha_{13}]$$
$$[\varrho', \alpha'_{12}|\alpha'_{24}, \alpha'_{13}] = [\varrho', \alpha'_{12}|\alpha'_{14}, \alpha'_{23}] = [\alpha'_{14}, \alpha'_{23}|\alpha'_{24}, \alpha'_{13}].$$

Da die α_{ik} $(\neq \alpha_{34})$ und α'_{ik} $(\neq \alpha'_{34})$ perspektiv liegen, ist $[\alpha_{14}, \alpha_{23}|\alpha_{24}, \alpha_{13}] = [\alpha'_{14}, \alpha'_{23}|\alpha'_{24}, \alpha'_{13}]$[6]), womit (1) bewiesen ist. Da aber auch ϱ und ϱ' perspektiv liegen, gilt:

$$[\omega, \alpha_{12}|\alpha_{1k}, \alpha_{2l}] = [\varrho, \alpha_{12}|\alpha_{1k}, \alpha_{2l}] \qquad (k, l = 3, 4;\ k \neq l)$$

oder:

$$1 = [\omega, \alpha_{12}|\alpha_{1k}, \alpha_{2l}] \cdot [\varrho, \alpha_{12}|\alpha_{1k}, \alpha_{2l}] = [\omega, \varrho|\alpha_{1k}, \alpha_{2l}]$$[7]).

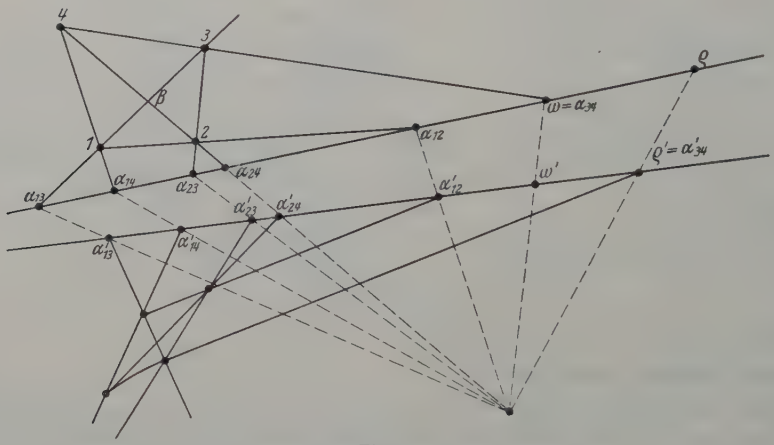

Fig. 4.

Wir beweisen noch: $[\omega, \varrho|\alpha_{14}, \alpha_{13}] = 1$. Das Quadrupel $\omega, \alpha_{24}, \alpha_{14}, \alpha_{13}$ liegt zu $3, \beta, 1, \alpha_{13}$ dieses wiederum zu $\alpha_{23}, \alpha_{24}, \alpha_{12}, \alpha_{13}$ perspektiv (s. Fig. 4). Es gilt also:

$$[\omega, \alpha_{24}|\alpha_{14}, \alpha_{13}] = [\alpha_{23}, \alpha_{24}|\alpha_{12}, \alpha_{13}]$$

und entsprechend:

$$[\varrho', \alpha'_{24}|\alpha'_{14}, \alpha'_{13}] = [\alpha'_{23}, \alpha'_{24}|\alpha'_{12}, \alpha'_{13}].$$

Da aber ϱ, α_{ik} $(\neq \alpha_{34})$ und ϱ', α'_{ik} $(\neq \alpha'_{34})$ perspektiv liegen, ist:

$$[\omega, \alpha_{24}|\alpha_{14}, \alpha_{13}] = [\varrho, \alpha_{24}|\alpha_{14}, \alpha_{13}]$$

oder:

$$[\omega, \varrho|\alpha_{14}, \alpha_{13}] = 1.$$

Die übrigen unter (2) zusammengefaßten Relationen ergeben sich durch Multiplikationen der bereits bewiesenen.

Satz 4 ist, wie man leicht einsieht, ein Spezialfall einer der Relationen (2). Dagegen läßt sich der Satz 2 nicht als Spezialfall deuten und bedarf eines eigenen Beweises, da es sich hier um einen Ausartungsfall handelt.

[6]) Nach [5] S. 116 (15) haben Trennsymbole perspektiver Punktequadrupel denselben Wert.

[7]) Siehe [5] S. 111 (8).

§ 2. Einführung von Koordinaten.

Wie M. HALL [1] zuerst gezeigt hat, läßt sich jeder projektiven Ebene mindestens ein sog. *ternärer Ring* als Koordinatenbereich zuordnen, der bei desarguesschen Geometrien mit dem zugehörigen Körper übereinstimmt. Umgekehrt entspricht jedem ternären Ring *eindeutig* eine projektive Ebene. SKORNYAKOV [4] hat danach noch etwas allgemeinere Ringe, die er *Ternare* nennt, zu demselben Zwecke gebraucht. Allerdings ist bei desarguesschen Geometrien ein zugehöriger Ternar im allgemeinen kein Körper. Der zugehörige Körper ist hier nur ein spezieller Ternar.

Da ich bei meinen Untersuchungen keine HALLschen ternären Ringe zugrunde legen will, sondern einen anderen Spezialfall von Ternaren, werde ich zunächst angeben, was SKORNYAKOV unter einem Ternar versteht und dann die Spezialisierungen, die zu den hier zugrunde gelegten ternären Ringen führen[8]). Wie wir sehen werden, sind die hier betrachteten ternären Ringe genau so wie die HALLschen im Fall einer desarguesschen Geometrie Körper.

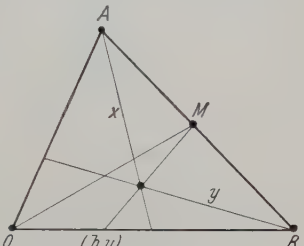

Fig. 5.

SKORNYAKOV wählt in der projektiven Ebene drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte A, B, O aus. Jeder Geraden des Büschels durch A mit Ausnahme der Geraden AB wird umkehrbar eindeutig ein Symbol a einer Menge $\mathfrak{M} = \{a\}$ zugeordnet, der Geraden AO speziell das Symbol 0. Den Geraden durch B mit Ausnahme der Geraden AB werden ebenfalls eindeutig aber vollkommen beliebig die Symbole der Menge $\mathfrak{M}$ zugeordnet mit der einen Einschränkung, daß der Geraden BO das Symbol 0 entspricht. Genau so verfährt man mit dem Büschel durch O, wobei der Geraden AO das Symbol 0 zugeordnet wird, während der Geraden BO kein Symbol entspricht.

Da jeder Punkt P der Ebene, der nicht auf der Geraden AB liegt durch genau zwei Geraden von denen die eine durch A und die andere durch B geht, festgelegt ist, erhält P die den beiden Geraden entsprechenden Symbole a, b als Koordinaten, geschrieben $P = (a, b)$. Nunmehr wird folgende *ternäre Operation* eingeführt: Drei gegebenen Elementen $m, y, b \in \mathfrak{M}$ wird ein Element $x \in \mathfrak{M}$ (s. Fig. 5) in der folgenden Weise zugeordnet:

Ist (m) der Schnittpunkt der m zugeordneten Geraden durch O mit der Geraden AB, dann ist x die erste Koordinate des Schnittpunktes der y zugeordneten Geraden durch B und der Verbindungsgeraden von (m) und (b, O). In Zeichen schreiben wir dafür: $x = (m, y, b)$.

Diese Operation hat nun die folgenden Eigenschaften:

1. $(0, a, c) = (m, 0, c) = c$.
2. $(m, a, z) = c$ *hat eine eindeutige Lösung in bezug auf* z.
3. $(m_1, x, b_1) = (m_2, x, b_2)$, $m_1 \neq m_2$ *hat eine eindeutig bestimmte Lösung* x.

[8]) Die hier zugrunde gelegten ternären Ringe sind von E. SPERNER eingeführt worden.

4. *Durch das Gleichungssystem* $(m, a_1, b) = c_1$, $(m, a_2, b) = c_2$, $a_1 \neq a_2$ *ist das Paar* m, b *eindeutig bestimmt.*

Jede Menge $\mathfrak{M}$ mit einer ternären Verknüpfung, die die Eigenschaften 1. bis 4. besitzt, nennt SKORNYAKOV einen *Ternar*. Von einem Ternar gelangt man umgekehrt zu einer projektiven Ebene mit den Punkten (a, c), (m), B und den Geraden $x = (m, y, b)$, $y = b$, l_∞, wobei $a, b, c, m \in \mathfrak{M}$ und B und l_∞ gewisse Hilfssymbole sind. Die *Inzidenz* ist wie folgt erklärt: (a, c) inzidiert mit $x = (m, y, b)$ genau dann, wenn $a = (m, c, b)$ ist; (a, c) inzidiert mit $y = c$ für alle a; (m) inzidiert mit $x = (m, y, b)$ für alle b; für alle m inzidieren (m) und l_∞; B inzidiert mit $y = c$ für alle c und mit l_∞.

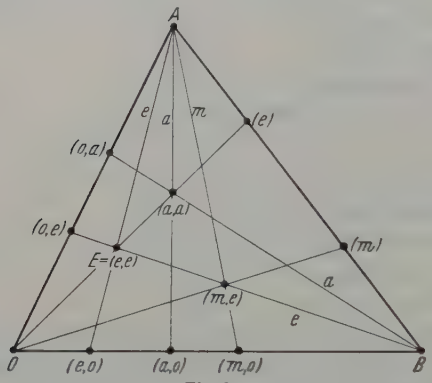

Fig. 6.

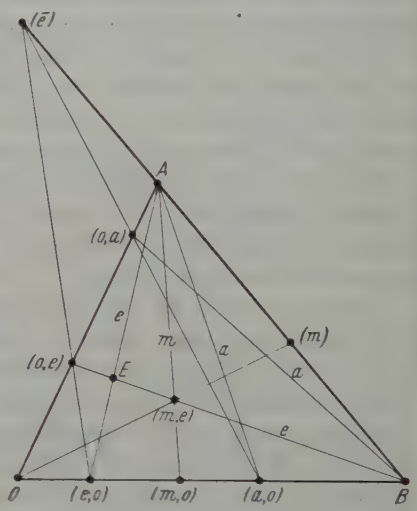

Fig. 7.

Die Axiome 3. bzw. 4. sind gewissermaßen gleichwertig mit den Aussagen: *Zwei nichtparallele Geraden haben genau einen Schnittpunkt bzw. zwei Punkte mit verschiedener erster Koordinate haben genau eine Verbindungsgerade.*

Die Axiome 1. bis 4. hat SKORNYAKOV dem HALLschen Axiomensystem entnommen. Von zwei weiteren Axiomen des HALLschen Systems, nämlich, daß $(m, x, b) = c$ bzw. $(z, a, b) = c$ eine eindeutige Lösung x bzw. z haben, hat SKORNYAKOV gezeigt, daß sie bereits aus 1. bis 4. folgen.

Zu den HALLschen wie den hier benutzten ternären Ringen gelangt man nun, indem man die bei einem SKORNYAKOVschen Ternar fast völlig beliebige Zuordnung zwischen den drei Büscheln A, B, O und den Symbolen der Menge $\mathfrak{M}$ spezialisiert. Hierzu wählen wir einen Punkt E aus, der auf keiner Seite des Dreiecks ABO liegt, und ordnen ihm die Koordinaten (e, e) zu.

Die Zuordnung zwischen den Elementen von $\mathfrak{M}$ und den Geraden des Büschels B erfolgt bei HALL in der Weise (s. Fig. 6), daß die Punkte der Geraden OE dieselbe erste und zweite Koordinate erhalten. Einer Geraden des Büschels O wird das Element m zugeordnet, wenn die Gerade mit dem Punkt (m, e) inzidiert.

Abweichend davon nehmen wir die Zuordnung zwischen den Elementen der Menge $\mathfrak{M}$ und den Geraden des Büschels B folgendermaßen vor: *Durch*

E sind die Punkte $(e, 0)$, $(0, e)$ *und* $(\bar{e})$ *wie in Fig. 7 erklärt; ausgehend von einer Geraden a des Büschels A welche OB im Punkte* $(a, 0)$ *schneidet, wird der Punkt* $(0, a)$ *als Schnittpunkt von OA mit der Geraden durch* $(\bar{e})$ *und* $(a, 0)$ *bestimmt; dann erhält die Gerade durch* $(0, a)$ *und B ebenfalls das Symbol a zugeordnet.* Die Zuordnung zwischen dem Büschel O und der Menge $\mathfrak{M}$ ist dieselbe wie bei HALL. Die Spezialisierungen in der Zuordnung führen zu folgenden zusätzlichen Eigenschaften des Ternars[9]):

5. *Es gibt ein Rechtseinselement e mit* $(m, e, 0) = m$.
6. *Es gibt ein Element* $\bar{e} \in \mathfrak{M}$ *mit* $(\bar{e}, a, a) = 0$ *für jedes* $a \in \mathfrak{M}$.

Daß umgekehrt diese zusätzlichen Eigenschaften in der zugehörigen projektiven Ebene die speziellen Zuordnungen zwischen den Büscheln bedingen, sieht man leicht ein. Desgleichen kann man für einen ternären Ring dieser Art ohne weiteres erkennen, daß er im Fall einer desarguesschen Geometrie ein Körper ist.

Für unsere ternären Ringe führen wir jetzt einige Abkürzungen ein. Wir setzen:

$$(a, b, 0) = a\,b$$

$$(a, e, b) = a + b$$

$-a$ ist definiert durch:

$$(a, e, -a) = a + (-a) = 0.$$

Statt $(a, e, -b) = a + (-b)$ schreiben wir kurz: $a - b$. Hierbei ist zu beachten, daß trotz $a - a = 0$ keineswegs $-a + a = 0$ zu sein braucht. Dies wäre sonst bereits ein Schließungssatz.

Die Operation $(a, b, 0) = a\,b$ wollen wir *Multiplikation* und die Operation $(a, e, b) = a + b$ *Addition* nennen, wobei zu beachten ist, daß für diese Operationen im nichtdesarguesschen Fall nur die Axiome 1 bis 6 gesichert sind.

§ 3. Ordnungsfunktion und Halbordnung.

In diesem Paragraphen wird zunächst ein der projektiven Ebene Π zugeordneter ternärer Ring $\mathfrak{M}$ durch eine Ordnungsfunktion mit Geradenrelation angeordnet und einige Eigenschaften der *induzierten Anordnung* hergeleitet. Umgekehrt wird gezeigt, wie man mit Hilfe einer *Halbordnung*[10]) des ternären Ringes $\mathfrak{M}$ eine Ordnungsfunktion in Π *erzeugen* kann. Die hier hergeleiteten Eigenschaften reichen jedoch keineswegs aus, um die induzierte Anordnung vollständig zu kennzeichnen. Vielmehr erfolgt eine vollständige Kennzeichnung erst im nächsten Paragraphen. So genügen auch die hier durch Halbordnungen des ternären Ringes erzeugten Ordnungsfunktionen im allgemeinen nicht der Geradenrelation. An die Halbordnung sind in nichtdesarguesschen Ebenen noch wesentlich stärkere Forderungen zu stellen,

[9]) Bei HALL ergibt sich statt dessen: Es gibt ein Einselement e mit $(e, a, 0) = a$ und $(m, e, 0) = m$.

[10]) Unter einer *Halbordnung* versteht man eine Anordnung, die dem folgenden *Monotoniegesetz der Multiplikation* genügt: *Ist* $a > 0$ *und* $b > 0$ *oder* $a < 0$ *und* $b < 0$, *so ist stets* $a\,b > 0$. *Ist* $a > 0$ *und* $b < 0$ *oder* $a < 0$ *und* $b > 0$, *so ist stets* $a\,b < 0$.

wenn mit ihrer Hilfe eine Ordnungsfunktion mit Geradenrelation erzeugt werden soll.

Wir denken uns in unserer Ebene Π eine Ordnungsfunktion mit Geradenrelation gegeben und betrachten einen dieser Geometrie zugeordneten ternären Ring $\mathfrak{M}$ mit dem Grunddreieck ABO. Die Punkte der Geraden OB, die wir x-Achse nennen wollen, bezeichnen wir durch die Elemente von $\mathfrak{M}$, indem wir jedem dieser Punkte X das Element von $\mathfrak{M}$ zuordnen, das der Geraden AX entspricht. Mit den Punkten der Geraden OA (y-Achse) verfahren wir entsprechend, hängen ihnen aber zur Unterscheidung einen Strich an. Für die Punkte B und A führen wir die Symbole ∞ und ∞' ein.

Jetzt können wir unseren ternären Ring $\mathfrak{M}$ in der folgenden Weise anordnen:

Die von 0 verschiedenen Elemente von $\mathfrak{M}$ werden in zwei Klassen >0 und <0 eingeteilt durch die Vorschrift, daß

$$a>0 \text{ gleichbedeutend mit } [0, \infty | e, a] = +1$$
$$a<0 \text{ gleichbedeutend mit } [0, \infty | e, a] = -1$$

sein soll.

Es erhebt sich nun die Frage, welche Eigenschaften hat diese induzierte Anordnung des ternären Ringes? Hier bleibt zunächst zu prüfen, ob das *Monotoniegesetz*[10]) der Multiplikation erfüllt ist.

Das Monotoniegesetz der Multiplikation ist gleichwertig mit der Aussage:

$$[0, \infty | e, a] \cdot [0, \infty | e, b] = [0, \infty | e, ab][11]),$$

deren Richtigkeit wir behaupten.

Beweis[12]). Der Beweis ergibt sich (s. Fig. 8) durch achtmalige Anwendung der Geradenrelation:

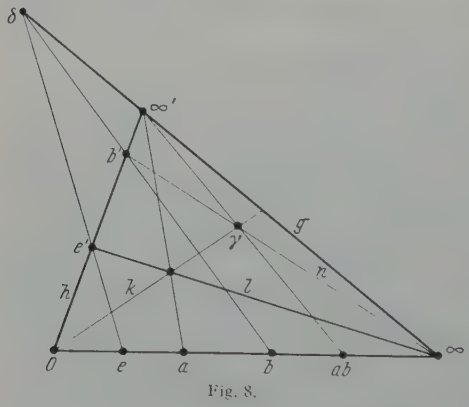

Fig. 8.

$$\begin{array}{llll} k(ab) & n(ab) & k(\infty') & n(\infty') = 1 \\ k(\infty') & l(\infty') & k(a) & l(a) = 1 \\ n(\infty') & l(\infty') & n(\delta) & l(\delta) = 1 \\ n(\delta) & h(\delta) & n(b) & h(b) = 1 \\ h(\delta) & l(\delta) & h(e) & l(e) = 1 \\ n(b) & g(b) & n(ab) & g(ab) = 1 \\ h(ab) & k(ab) & h(a) & k(a) = 1 \\ l(a) & g(a) & l(e) & g(e) = 1. \end{array}$$

Diese Gleichungen besagen, daß

$$h(a)\, h(b)\, g(a)\, g(b) = h(ab)\, g(ab)\, h(e)\, g(e)$$

oder umgeformt:

$$h(e)\, h(a)\, g(e)\, g(a)\, h(e)\, h(b)\, g(e)\, g(b) = h(e)\, h(ab)\, g(e)\, g(ab),$$

was mit der Behauptung gleichwertig ist.

[11]) Siehe [5] S. 123 unten.

[12]) Der Beweis ist erforderlich, da die Multiplikation hier anders definiert ist als in [5].

Wir nennen eine Anordnung eines ternären Ringes, die dem Monotoniegesetz der Multiplikation genügt, eine *Halbordnung*. Es gilt folglich der

Satz 5. *Eine Ordnungsfunktion induziert in jedem ternären Ring der Geometrie eine Halbordnung.*

Sehen wir uns die Sätze 2 und 3 an, so erkennen wir, daß man aus ihnen Folgerungen für die von einer Ordnungsfunktion induzierten Anordnung des ternären Ringes ziehen kann, nämlich

Satz 6. *Je nachdem, ob die Ordnungsfunktion $h(\alpha)$ harmonisch oder anharmonisch ist, gilt für jedes von 0 verschiedene $a \in \mathfrak{M}$, daß a und $-a$ in entgegengesetzten Klassen oder in derselben Klasse der Anordnung liegen.*

Satz 7. *Je nachdem, ob die Ordnungsfunktion $h(\alpha)$ harmonisch oder anharmonisch ist, gilt für jedes von 0 verschiedene $b \in \mathfrak{M}$ und die Lösung x der Gleichung $(e, b, x) = 0$, daß b und x in entgegengesetzten Klassen oder in derselben Klasse der Anordnung liegen.*

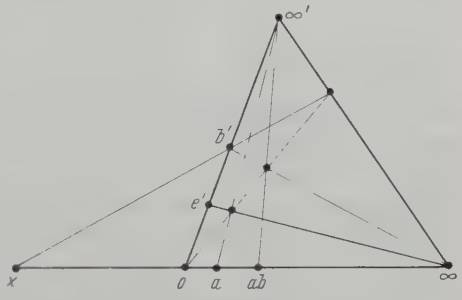

Fig. 9.

Zum Beweise der Sätze 6 und 7 betrachten wir Fig. 9[13]). Man sieht, daß die Punkte $0, \infty, ab, x$, wobei x durch $(a, b, x) = 0$ bestimmt ist, ein harmonisches Quadrupel bilden, d.h. es ist $[0, \infty \mid ab, x] = -1$, wenn $h(\alpha)$ harmonisch und $= +1$, wenn $h(\alpha)$ anharmonisch ist. Ist nun insbesondere $b = e$, so folgt $ab = ae = a$ und $x = -a$. Aus der Identität $[0, \infty \mid e, a] \cdot [0, \infty \mid e, -a] = [0, \infty \mid a, -a]$ ergibt sich also die Richtigkeit von Satz 6.

Ist $a = e$, so erhält man Satz 7 aus der Identität $[0, \infty \mid eb, x] = [0, \infty \mid e, eb] \cdot [0, \infty \mid e, x] = [0, \infty \mid e, b] \cdot [0, \infty \mid e, x]$, deren Gültigkeit aus dem Monotoniegesetz der Multiplikation resultiert.

Nun sei ein ternärer Ring $\mathfrak{M}$ der projektiven Ebene Π fest gegeben. Jede Halbordnung (das ist eine Anordnung, die dem Monotoniegesetz der Multiplikation genügt) des ternären Ringes $\mathfrak{M}$ stellen wir der Vereinfachung halber als Funktion dar, indem wir für jedes Element $a \in \mathfrak{M}$

$$o(a) = \begin{cases} +1 & \text{für} \quad a > 0 \\ 0 & \text{für} \quad a = 0 \\ -1 & \text{für} \quad a < 0 \end{cases}$$

setzen. Die Geradengleichungen wollen wir in Zukunft in der Form $(m, y, b) - xw = 0$ schreiben, wobei $w = e$ oder 0 sein kann. Die Geraden $y = b$ sind hierbei für $w = 0$ miterfaßt, da wir sie auch in der Form $(e, y, \underline{b}) = 0$ darstellen können. $\underline{b}$ ist dabei durch $(e, b, \underline{b}) = 0$ definiert.

[13]) Zum Beweis kann nicht das Monotoniegesetz der Multiplikation benutzt werden, da im allgemeinen $-a \neq a(-e)$ ist.

Ist nun o eine beliebige Halbordnung, so läßt sich eine spezielle Ordnungsfunktion wie folgt erklären:

Für alle Punkte $\alpha:(x, y)$ *und alle Geraden* $h \neq l_\infty$ *setzen wir:* $h(\alpha) = o\big((m, y, b) - xw\big)$.

Für alle Punkte α, *die nicht mit* l_∞ *inzidieren:* $l_\infty(\alpha) = +1$.

Für die Punkte $\alpha:(a)$, *die mit* l_∞ *inzidieren und alle Geraden* $h \neq l_\infty$: $h(\alpha) = o\big((m, e, 0) - aw\big) = o(m - aw)$.

Für den Punkt ∞ *und alle Geraden* h, *die nicht mit* ∞ *inzidieren* $h(\infty) = 1$.

In allen Fällen, in denen Punkt und Gerade inzidieren: $h(\alpha) = 0$.

Hiermit ist diese spezielle Ordnungsfunktion für alle Punkte und alle Geraden eindeutig bestimmt. Im Falle einer desarguesschen Geometrie ist die eben definierte Ordnungsfunktion eine *normale* Ordnungsfunktion[14]) und genügt somit auch der Geradenrelation. Wann die hier angegebene Ordnungsfunktion auch im Falle einer nichtdesarguesschen Geometrie der Geradenrelation genügt, bzw. welche weiteren Forderungen an die Halbordnung hierfür zu stellen sind, soll im nächsten Paragraphen untersucht werden.

Die eben definierte Ordnungsfunktion wollen wir mit $\overline{h(\alpha)}$ bezeichnen. Zu jeder Halbordnung des ternären Ringes läßt sich auf diese Weise eine spezielle Ordnungsfunktion definieren. Alle Ordnungsfunktionen $h(\alpha)$, deren abgeleitete Ordnungsfunktion zweiter Stufe $[h, k|\alpha, \beta]$ mit der abgeleiteten Ordnungsfunktion zweiter Stufe von $\overline{h(\alpha)}$ übereinstimmen, erhalten wir durch eine Art von Normierung, die im Falle eines Körpers mit der Vektornormierung zusammenfällt. Wir können nämlich jedem Punkt bzw. jeder Geraden einen Proportionalitätsfaktor r bzw. s zuordnen und dann $h(\alpha) = \overline{h(\alpha)} \cdot o(r) \cdot o(s) = \overline{h(\alpha)} \cdot o(r\,s)$ setzen oder direkter jedem Punkt bzw. jeder Geraden eine Ordnung $\{\alpha\} = +1$ oder -1 bzw. $\{h\} = +1$ oder -1 zuordnen und $h(\alpha) = \overline{h(\alpha)} \cdot \{\alpha\} \cdot \{h\}$ schreiben. *Jede Ordnungsfunktion* $h(\alpha)$, *die sich in dieser Weise erklären läßt, nennen wir erzeugbar.*

Hiermit ist bereits der Zusammenhang mit den Ordnungsfunktionen der *Einheitsklasse*[15]) aufgezeigt. Das Produkt zweier Ordnungsfunktionen, deren abgeleitete Ordnungsfunktionen zweiter Stufe übereinstimmen, liefert eine Ordnungsfunktion der Einheitsklasse. Wir können aber noch weitergehen und zeigen, daß alle Ordnungsfunktionen, die mit Hilfe einer beliebigen Halbordnung des ternären Ringes auf die hier beschriebene Weise erzeugt werden können, eine Untergruppe bilden. Da die Ordnungsfunktionen alle involutorisch sind, brauchen wir hierzu nur zu zeigen, daß die Abgeschlossenheit erfüllt ist. Es seien $\{h(\alpha)\}_1 = \{\overline{h(\alpha)}\}_1 \{\alpha\}_1 \cdot \{h\}_1$ und $\{h(\alpha)\}_2 = \{\overline{h(\alpha)}\}_2 \cdot \{\alpha\}_2 \cdot \{h\}_2$ zwei dieser Ordnungsfunktionen. Ihr Produkt ergibt: $\{h(\alpha)\}_3 = \{\overline{h(\alpha)}\}_1 \cdot$

[14]) Siehe [7] S. 142ff.

[15]) Vgl. [6] S. 28.

$\{\overline{h(\alpha)}\}_2\,\{\alpha\}_3 \cdot \{h\}_3$. Insbesondere ist für alle nichtinzidenten Paare h, α entweder:

$$\{\overline{h(\alpha)}\}_1\,\{\overline{h(\alpha)}\}_2 = o_1\big((m, y, b) - x\,w\big) \cdot o_2\big((m, y, b) - x\,w\big)$$

oder:

$$= \{\overline{l_\infty(\alpha)}\}_1\,\{\overline{l_\infty(\alpha)}\}_2 = +1$$

oder:

$$= o_1(m - a\,w) \cdot o_2(m - a\,w)$$

oder:

$$= \{\overline{h(\infty)}\}_1 \cdot \{\overline{h(\infty)}\}_2 = 1\,.$$

Da aber die Halbordnungen des ternären Ringes eine Gruppe bilden, ist auch $\overline{h_1(\alpha)}\;\overline{h_2(\alpha)} = \overline{h_3(\alpha)}$ eine Ordnungsfunktion der gewünschten Art und somit die Gruppeneigenschaft erwiesen.

Zusammenfassend kann man sagen:

Satz 8. *Jedem ternären Ring $\mathfrak{M}$ läßt sich eindeutig eine Untergruppe von Ordnungsfunktionen zuordnen, die alle mit Hilfe der Halbordnungen von $\mathfrak{M}$ erzeugbar sind.*

Für diese Ordnungsfunktionen läßt sich noch die folgende Eigenschaft beweisen:

Satz 9. *Jede erzeugbare Ordnungsfunktion erfüllt bezüglich aller Geradenpaare, die sich auf der x-Achse schneiden und aller Punktepaare, die mit der x-Achse inzidieren, die Geradenrelation.*

Der *Beweis* ergibt sich unmittelbar aus:

$$g(\alpha)\,g(\beta)\,h(\alpha)\,h(\beta) = \overline{g(\alpha)}\;\overline{g(\beta)}\;\overline{h(\alpha)}\;\overline{h(\beta)} \text{ und (da } w_1 = w_2) \text{ aus:}$$

$$\overline{g(\alpha)}\;\overline{h(\alpha)} = o\big((m_1, 0, b_1) - x_1 w_1\big) \cdot o\big((m_2, 0, b_1) - x_1 w_2\big) =$$

$$= o\,(b_1 - x_1 w_1)\,o\,(b_1 - x_1 w_2) = 1\,.$$

Im Falle, daß eine der Geraden etwa $h = l_\infty$ ist, hat die Gerade g eine Gleichung der Gestalt $(m_1, y, b_1) = 0$, d.h. $w_1 = 0$ und der Beweis ergibt sich aus $\overline{l_\infty(\alpha)} \cdot \overline{l_\infty(\beta)} = 1$ und aus $g(\alpha) \cdot g(\beta) = o\,(b_1) \cdot o\,(b_1) = 1$.

Auf Grund von Satz 9 gilt auch:

Satz 10. *Eine Ordnungsfunktion genügt dann und nur dann der Geradenrelation, wenn sie sich mit Hilfe geeigneter Halbordnungen in jedem ternären Ring, der der Geometrie zugeordnet ist, erzeugen läßt*[16].

Im folgenden Paragraphen soll, neben der Frage, welche Bedingungen die Halbordnung erfüllen muß, damit die hier definierten Ordnungsfunktionen der Geradenrelation genügen, untersucht werden, ob auf diese Weise alle Ordnungsfunktionen mit Geradenrelation erzeugbar sind.

[16]) Im Gegensatz zu dieser Aussage erfolgt im nächsten Paragraphen die Charakterisierung der Ordnungsfunktionen mit Geradenrelation durch Eigenschaften der Anordnung eines festen ternären Ringes.

§ 4. Kennzeichnung der Ordnungsfunktionen mit Geradenrelation durch Eigenschaften der zugehörigen Halbordnung.

Bevor wir auf den wesentlichsten Kern dieser Untersuchungen eingehen können, müssen wir die folgenden Begriffe erklären: *Starkes Monotoniegesetz: Aus* $m, n, z, a, b, r \in \mathfrak{M}$ *und* $(m, z, a) = (n, z, b)$ *folgt* $o\big((m, r+z, a) - (n, r+z, b)\big) = o(m-n) \cdot o(r)$; *aus* $m, r, a, b \in \mathfrak{M}$ *folgt* $o\big((m, r, a) - (m, r, b)\big) = o(a-b)$.

Eine Halbordnung, die dem starken Monotoniegesetz genügt, heißt starke Halbordnung.

Man erkennt leicht, daß im Falle eines Körpers das starke Monotoniegesetz mit dem gewöhnlichen Monotoniegesetz der Multiplikation übereinstimmt.

Hauptsatz. *Eine Ordnungsfunktion genügt dann und nur dann der Geradenrelation, wenn sie mittels einer starken Halbordnung des ternären Ringes erzeugbar ist.*

Wir beweisen zunächst das *„dann"*. Nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen kann man sich hierbei auf Ordnungsfunktionen $\overline{h(\alpha)}$ beschränken. Es ist also zu zeigen: Sind α, β, γ drei beliebige Punkte einer Geraden j, so gilt für zwei beliebige Gerade g, h, die mit γ nicht aber mit α oder β inzidieren:

$$\overline{h(\alpha)}\ \overline{h(\beta)}\ \overline{g(\alpha)}\ \overline{g(\beta)} = 1.$$

Wir betrachten zunächst den allgemeinen Fall. Folgende Zuordnungen mögen bestehen:

$$\begin{aligned} \alpha &\leftrightarrow (x_1, y_1) & g &\leftrightarrow (m_1, y, a_1) - x w_1 = 0 \\ \beta &\leftrightarrow (x_2, y_2) & h &\leftrightarrow (m_2, y, a_2) - x w_2 = 0 \\ \gamma &\leftrightarrow (x_0, y_0) & j &\leftrightarrow (n, y, b) \quad - x w = 0. \end{aligned}$$

Hier sind nun die folgenden zwei Hauptfälle zu unterscheiden:

1. $w = e$, d.h. $j \leftrightarrow (n, y, b) - x = 0$. Da α, β, γ mit j inzidieren, gilt:

I: $(n, y_1, b) - x_1 = 0$ II: $(n, y_2, b) - x_2 = 0$ III: $(n, y_0, b) - x_0 = 0$

und da γ mit g und h:

IV: $(m_1, y_0, a_1) - x_0 w_1 = 0$ V: $(m_2, y_0, a_2) - x_0 w_2 = 0$.

Für $\overline{g(\alpha)}$ erhalten wir dann:

$$\overline{g(\alpha)} = o\big((m_1, y_1, a_1) - x_1 w_1\big) \quad \text{oder} \quad x_1 = (n, y_1, b)$$

gemäß I eingesetzt:

$$\overline{g(\alpha)} = o\big((m_1, y_1, a_1) - (n, y_1, b) w_1\big).$$

Da die Gleichung $y_1 = r_1 + y_0$ eindeutig nach r_1 lösbar ist, können wir für y_1 folglich $r_1 + y_0$ einsetzen und da nach III und IV $(m_1, y_0, a_1) = (n, y_0, b) w_1$ ist, anschließend das starke Monotoniegesetz anwenden. Für $w_1 = e$ ergibt sich folglich:

$$\overline{g(\alpha)} = o\big((m_1, r_1 + y_0, a_1) - (n, r_1 + y_0, b)\big) = o(m_1 - n) \cdot o(r_1).$$

Dagegen für $w_1 = 0$ (d.h. $g \leftrightarrow (e, y, \underline{y}_0) = 0$):

$$\overline{g(\alpha)} = o\left((e, r_1 + y_0, \underline{y}_0)\right) = o(e) \cdot o(r_1) = o(r_1)\ ^{17}).$$

Entsprechend erhält man:

$$\overline{g(\beta)} = \begin{cases} o(m_1 - n) \cdot o(r_2) & \text{für } w_1 = e \\ o(r_2) & \text{für } w_1 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{h(\alpha)} = \begin{cases} o(m_2 - n) \cdot o(r_1) & \text{für } w_2 = e \\ o(r_1) & \text{für } w_2 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{h(\beta)} = \begin{cases} o(m_2 - n) \cdot o(r_2) & \text{für } w_2 = e \\ o(r_2) & \text{für } w_2 = 0. \end{cases}$$

Hieraus erkennt man durch Ausmultiplizieren die Gültigkeit der Geradenrelation.

2. $w = 0$ d.h. $j \leftrightarrow (e, y, \underline{y}_0) = 0$. In diesem Fall ist wegen $g, h \neq j$ sicher $w_1 = w_2 = e$. Da α, β mit j inzidieren, gilt: $\alpha \leftrightarrow (x_1, y_0)$, $\beta \leftrightarrow (x_2, y_0)$. Nach IV erhält man folglich:

$$\overline{g(\alpha)} = o\left((m_1, y_0, a_1) - x_1\right) = o(x_0 - x_1), \quad \overline{g(\beta)} = o\left((m_1, y_0, a_1) - x_2\right) = o(x_0 - x_2)$$

und nach V:

$$\overline{h(\alpha)} = o\left((m_2, y_0, a_2) - x_1\right) = o(x_0 - x_1), \quad \overline{h(\beta)} = o\left((m_2, y_0, a_2) - x_2\right) = o(x_0 - x_2).$$

Auch hier erkennt man jetzt durch Ausmultiplizieren die Richtigkeit der Geradenrelation.

Es bleiben noch die Fälle zu betrachten:

a) Eine der Geraden g, h ist gleich l_∞, bzw. γ liegt auf l_∞, ohne daß α und β auf l_∞ liegen.

b) Einer der Punkte α, β inzidiert mit l_∞.

c) Beide Punkte α, β inzidieren mit l_∞.

a) Es sei $g = l_\infty$. Dann ist nach Definition von $\overline{h(\alpha)}$: $\overline{l_\infty(\alpha)} = \overline{l_\infty(\beta)} = 1$. Die Geradenrelation ist also dann erfüllt, wenn $h(\alpha)\, h(\beta) = 1$ ist. Da sich g, h, j in einem Punkt schneiden und $g = l_\infty$ ist, ist entweder $(m_1) = (n)$, d.h. $m_1 = n$, oder h, j haben Gleichungen der Gestalt: $(e, y, a_2) = 0$ und $(e, y, \underline{y}_0) = 0$. Im ersten Fall erhalten wir also mit Hilfe des starken Monotoniegesetzes:

$$\overline{h(\alpha)} = o\left((n, y_1, a_2) - (n, y_1, b)\right) = o(a_2 - b)$$
$$\overline{h(\beta)} = o\left((n, y_2, a_2) - (n, y_2, b)\right) = o(a_2 - b)$$

d.h. $\overline{h(\alpha)}\ \overline{h(\beta)} = 1$. Im zweiten ist wegen $\alpha \leftrightarrow (x_1, y_0)$, $\beta \leftrightarrow (x_2, y_0)$: $\overline{h(\alpha)} = \overline{h(\beta)} = o(e, y_0, a_2)$. Hiermit ist, wie man ohne weiteres einsieht, auch der Fall, daß γ auf l_∞ liegt, mit bewiesen.

[17]) Diese Umformung ergibt sich aus dem starken Monotoniegesetz, wenn man $m = e$, $n = 0$, $z = y_0$, $a = \underline{y}_0$, $b = 0$ setzt. Dann ist $(e, y_0, \underline{y}_0) = (0, y_0, 0) = 0$ erfüllt und man kann daher das starke Monotoniegesetz anwenden.

b) Es möge $\beta \neq \infty$, $\beta \leftrightarrow (n)$ auf l_∞ liegen. Dann gilt:

$$\overline{g(\beta)} = \begin{cases} o(m_1 - n) & \text{für } w_1 = e \\ o(e) = 1 & \text{für } w_1 = 0 \end{cases} \qquad \overline{h(\beta)} = \begin{cases} o(m_2 - n) & \text{für } w_2 = e \\ o(e) = 1 & \text{für } w_2 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{g(\alpha)} = \begin{cases} o(m_1 - n) \cdot o(r_1) & \text{für } w_1 = e \\ o(e, y_1, \underline{y}_0) = o(r_1) & \text{für } w_1 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{h(\alpha)} = \begin{cases} o(m_2 - n) \cdot o(r_1) & \text{für } w_2 = e \\ o(e, y_1, \underline{y}_0) = o(r_1) & \text{für } w_2 = 0. \end{cases}$$

Ist $\beta = \infty$ so hat j die Gleichung $(e, y, \underline{y}_0) = 0$. Nun ist $g(\infty) = h(\infty) = 1$ und nach Hauptfall 2: $g(\alpha) = h(\alpha) = o(x_0 - x_1)$. Beide Male erkennt man wiederum unmittelbar die Gültigkeit der Geradenrelation.

c) In diesem Fall liegt auch γ auf l_∞, d.h. $m_1 = m_2 = m$ bzw. $w_1 = w_2$. Auch hier erhalten wir die Geradenrelation sofort aus:

$$\overline{g(\alpha)} = \begin{cases} o(m - x_1) & \text{für } w_1 = e \\ o(e) = 1 & \text{für } w_1 = 0 \end{cases} \qquad \overline{g(\beta)} = \begin{cases} o(m - x_2) & \text{für } w_1 = e \\ o(e) = 1 & \text{für } w_1 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{h(\alpha)} = \begin{cases} o(m - x_1) & \text{für } w_2 = e \\ o(e) = 1 & \text{für } w_2 = 0 \end{cases} \qquad \overline{h(\beta)} = \begin{cases} o(m - x_2) & \text{für } w_2 = e \\ o(e) = 1 & \text{für } w_2 = 0. \end{cases}$$

Um das *„nur dann"* zu beweisen, muß zuerst gezeigt werden, daß die gemäß § 3 von einer Ordnungsfunktion mit Geradenrelation *induzierte Anordnung* des ternären Ringes dem *starken Monotoniegesetz* genügt. Der Beweis zerfällt in mehrere Schritte. Als erstes gehen wir von der folgenden Abschwächung des starken Monotoniegesetzes aus:

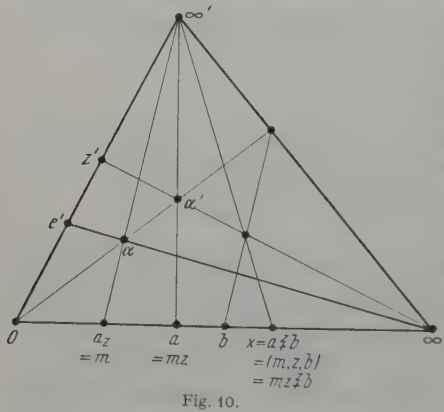

Fig. 10.

(1) $o\big((m,r,c) \dot{-} (n,r,c)\big) = o(m-n) \cdot o(r)$.

Zu dieser gelangt man, wenn man beim starken Monotoniegesetz $z = 0$ setzt. Wegen der Beziehung $(m, z, a) = (n, z, b)$ muß $a = b\,(= c)$ sein.

Die Richtigkeit von (1) wird sich aus drei Hilfssätzen ergeben. Zunächst werden neue Verknüpfungen zwischen den Elementen des ternären Ringes $\mathfrak{M}$ eingeführt, und zwar wird jedem von 0 verschiedenen Element $z \in \mathfrak{M}$ eine Art *„Addition"* zugeordnet nach folgender Vorschrift:

Zwei gegebenen Elementen $a, b \in \mathfrak{M}$ wird das Element $x \in \mathfrak{M}$ (in Zeichen $x = a \overset{z}{+} b$) zugeordnet, das der Verbindungsgeraden des Punktes ∞' mit dem Schnittpunkt der Geraden durch b, (a_z) und z', ∞ entspricht, wobei a_z durch $a_z z = a$ erklärt ist (s. Fig. 10)[18].

[18]) $\overset{z}{-} b$ ist entsprechend durch $b \overset{z}{+} (\overset{z}{-} b) = 0$ und $a \overset{z}{-} b$ durch $a \overset{z}{+} (\overset{z}{-} b)$ definiert.

Man wird gleich bemerken, daß man im Falle $z = e$ die gewöhnliche Addition erhält. Wie sofort ersichtlich, gilt nun (Fig. 10):

$$(2) \qquad (m, z, b) = m\, z \overset{z}{+} b.$$

Außerdem betrachten wir neben der bereits definierten Subtraktion noch die folgende: *„$a \overset{z}{\cdot} b$ sei erklärt durch $b \overset{z}{+} (a \overset{z}{\cdot} b) = a$ und entsprechend $a \overset{z}{:} b$ durch $b \overset{z}{+} (a \overset{z}{:} b) = a$“.*

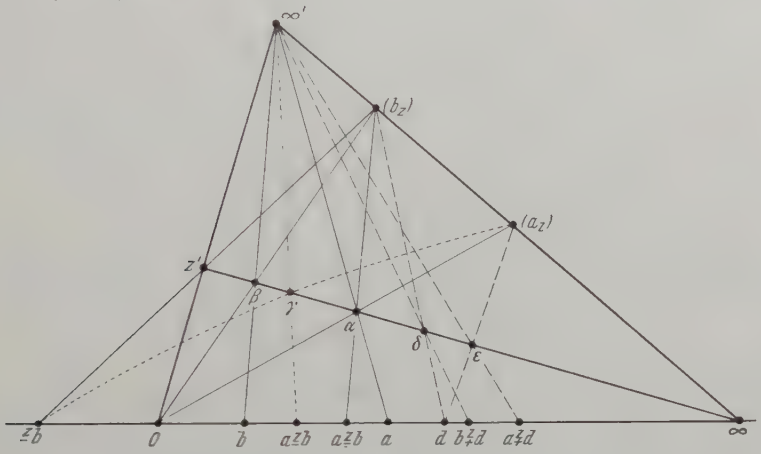

Fig. 11.

Wir beweisen jetzt, daß sich jeweils die folgenden Punktequadrupel durch Ketten von Perspektivitäten ineinander überführen lassen (wir gebrauchen hierfür das Zeichen $\sim$):

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (O, \infty, a, a \overset{z}{-} b) \sim (O, \infty, a, a \overset{z}{\cdot} b) \sim ((a), \infty, \infty', (b)) \sim \\ \qquad\qquad \sim (a, \infty, O, b) \sim (\overset{z}{-} a, \infty, O, \overset{z}{-} b), \end{array} \right.$$

$$(4) \qquad (O, \infty, \overset{z}{-} b, a \overset{z}{\cdot} b) \sim (b, \infty, O, a) \sim (b \overset{z}{+} d, \infty, d, a \overset{z}{+} d),$$

$$(5) \qquad (O, \infty, \overset{z}{-} b, \overset{z}{-} (b \overset{z}{+} d)) \sim (b \overset{z}{+} d, \infty, d, O),$$

$$(6) \qquad (O, \infty, a \overset{z}{\cdot} b, d) \sim (b, \infty, a, b \overset{z}{+} d),$$

$$(7) \qquad (O, \infty, a, b) \sim (O, \infty, a z, b z).$$

Aus Fig. 11 ersieht man, daß folgende Quadrupel perspektiv liegen (das Perspektivitätszentrum schreibe ich über das $\sim$-Zeichen):

$$(O, \infty, a, a \overset{z}{-} b) \overset{\infty'}{\sim} (z', \infty, \alpha, \gamma) \overset{(a_z)}{\sim} (\overset{z}{-} a, \infty, O, \overset{z}{-} b) \overset{z'}{\sim} ((a_z), \infty, \infty', (b_z))$$

und:

$$(O, \infty, a, a \overset{z}{\cdot} b) \overset{\alpha}{\sim} ((a_z), \infty, \infty', (b_z)) \overset{0}{\sim} (\alpha, \infty, z', \beta) \overset{\infty'}{\sim} (a, \infty, O, b).$$

Setzt man insbesondere $z = e$, so erkennt man, daß $((a), \infty, \infty', (b)) \sim (a, \infty, 0, b)$ ist. Damit ist (3) bewiesen.

Weiterhin ist:

$$(O, \infty, \overset{z}{-} b, a \overset{z}{\cdot} b) \overset{(bz)}{\sim} (\beta, \infty, z', \alpha) \overset{\infty'}{\sim} (b, \infty, O, a) \sim$$

$$\sim ((b_z), \infty, \infty', (a_z)) \overset{d}{\sim} (\delta, \infty, \{\infty', d\}, \varepsilon) \overset{\infty'}{\sim} (b \overset{z}{+} d, \infty, d, a \overset{z}{+} d)$$ [19],

d.h. auch (4) ist richtig.

Beachtet man (3), so ergibt sich (5) wie folgt:

$$(0, \infty, \overset{z}{-} b, \overset{z}{-} (b \overset{z}{+} d)) \sim (0, \infty, b, b \overset{z}{+} d) \overset{\infty'}{\sim} (z', \infty, \beta, \delta) \overset{(bz)}{\sim} (\overset{z}{-} b, \infty, 0, d) \overset{z'}{\sim}$$

$$\overset{z'}{\sim} ((b_z), \infty, \infty', \{z', d\}) \overset{d}{\sim} (\delta, \infty, \{\infty', d\}, z') \overset{\infty'}{\sim} (b \overset{z}{+} d, \infty, d, 0).$$

Als nächstes beweisen wir (6):

$$(0, \infty, a, \overset{z}{\cdot} b, d) \overset{(bz)}{\sim} (\beta, \infty, \alpha, \delta) \overset{\infty'}{\sim} (b, \infty, a, b \overset{z}{+} d).$$

Um schließlich (7) nachzuweisen, betrachten wir Fig. 10. Es ist:

$$(0, \infty, m) \overset{\infty'}{\sim} (e', \infty, \alpha) \overset{0}{\sim} (z', \infty, \alpha') \overset{\infty'}{\sim} (0, \infty, mz).$$

Durch diese Kette von Perspektivitäten geht also $(0, \infty, a, b)$ in $(0, \infty, az, bz)$ über.

Da das Trennsymbol gegenüber Perspektivitäten invariant ist, lassen sich aus den Beziehungen (3) bis (7) nachstehende Folgerungen ziehen. (Hierbei beachte man, daß aus $[0, \infty | a, x] = [0, \infty | a, y]$ stets $o(x) = o(y)$ folgt; denn dann gilt: $1 = [0, \infty | a, x] \cdot [0, \infty | a, y] = [0, \infty | x, y] = [0, \infty | e, x] \cdot [0, \infty | e, y]$ und damit auch $[0, \infty | e, x] = [0, \infty | e, y]$).

Aus (3) folgt: $[0, \infty | a, a \overset{z}{-} b] = [0, \infty | a, a \overset{z}{\cdot} b] = [a, \infty | 0, b]$. Insbesondere für $z = e$: $[0, \infty | a, a - b] = [0, \infty | a, a \cdot b] = [a, \infty | 0, b]$. Es gilt also:

Hilfssatz 1.

$$o(a - b) = o(a \overset{z}{-} b) = o(a \overset{z}{\cdot} b) = o(a \overset{z}{-} b). \tag{8}$$

Als nächstes zeigen wir:

Hilfssatz 2.

$$o((a \overset{z}{+} d) \overset{z}{-} (b \overset{z}{+} d)) = o(a \overset{z}{-} b). \tag{9}$$

Nach (5) ist:

$$[0, \infty | \overset{z}{-} b, \overset{z}{-} (b \overset{z}{+} d)] = [b \overset{z}{+} d, \infty | d, 0]$$

und nach (4):

$$[0, \infty | \overset{z}{-} (b \overset{z}{+} d), (a \overset{z}{+} d) \overset{z}{\cdot} (b \overset{z}{+} d)] = [(b \overset{z}{+} d), \infty | 0, a \overset{z}{+} d].$$

[19] Die zwei Punkte in der geschweiften Klammer sollen den in der Figur nicht extra eingezeichneten Bildpunkt repräsentieren, der ja auf der Verbindungsgeraden dieser beiden Punkte liegt.

Daher gilt:

$$[0,\infty\,|\,\overset{x}{-}b,\,(a\overset{x}{+}d)\overset{x}{\cdot\!-}(b\overset{x}{+}d)]$$
$$=[0,\infty\,|\,\overset{z}{-}b,\,\overset{z}{-}[b\overset{z}{+}d)]\cdot[0,\infty\,|\,\overset{z}{-}(b\overset{z}{+}d),(a\overset{z}{+}d)\overset{z}{\cdot\!-}(b\overset{z}{+}d)]$$
$$=[b\overset{z}{+}d,\infty\,|\,d,0]\cdot[b\overset{z}{+}d,\infty\,|\,0,a\overset{z}{+}d]$$
$$=[b\overset{z}{+}d,\infty\,|\,d,a\overset{z}{+}d]=[0,\infty\,|\,\overset{x}{-}b,a\overset{x}{\cdot\!-}b]\ ^{20}),$$

d.h.

$$o\big((a\overset{x}{+}d)\overset{x}{\cdot\!-}(b\overset{x}{+}d)\big)=o\big(a\overset{x}{\cdot\!-}b\big).$$

Wegen (8) gilt auch (9).

Beachtet man nacheinander (3), (6), (3) und (6), so erhält man:

$$[0,\infty\,|\,az,az-bz]=[az,\infty\,|\,0,bz]=[a,\infty\,|\,0,b]$$
$$=[0,\infty\,|\,a,a-b]=[0,\infty\,|\,az,(a-b)z].$$

Hieraus ersieht man

Hilfssatz 3.

$$o(az-bz)=o\big((a-b)z\big). \tag{10}$$

Setzt man $a\overset{z}{\cdot\!-}b=c$, so läßt sich (wegen $b\overset{z}{+}(a\overset{z}{\cdot\!-}b)=a$) a durch $a=b\overset{z}{+}c$ ausdrücken. Ersetzt man in (6) $a\overset{z}{\cdot\!-}b$ bzw. a durch c bzw. $b\overset{z}{+}c$, so erhält man:

$$(0,\infty,c,d)\sim\big(b,\infty,b\overset{z}{+}c,b\overset{z}{+}d\big). \tag{6'}$$

Mit Hilfe von (6') beweisen wir jetzt:

Hilfssatz 4.

$$o\big((b\overset{x}{+}c)\overset{z}{-}(b\overset{x}{+}d)\big)=o\big(c\overset{z}{-}d\big). \tag{11}$$

Nach (3) ist:

$$[0,\infty\,|\,b\overset{x}{+}c,(b\overset{x}{+}c)\overset{z}{-}(b\overset{x}{+}d)]=[b\overset{x}{+}c,\infty\,|\,0,b\overset{x}{+}d].$$

Wendet man zuerst (5) und dann (3) an, so erhält man:

$$[0,\infty\,|\,c,b\overset{x}{+}c]=[\overset{z}{-}(b\overset{x}{+}c),\infty\,|\,\overset{x}{-}b,0]=[b\overset{x}{+}c,\infty\,|\,b,0].$$

Jetzt kann man folgende Umformung vornehmen:

$$[0,\infty\,|\,c,(b\overset{z}{+}c)\overset{z}{-}(b\overset{x}{+}d)]=[0,\infty\,|\,c,b\overset{x}{+}c]\cdot[0,\infty\,|\,b\overset{z}{+}c,(b\overset{z}{+}c)\overset{z}{-}(b\overset{x}{+}d)]$$
$$=[b\overset{x}{+}c,\infty\,|\,b,0]\cdot[b\overset{x}{+}c,\infty\,|\,0,b\overset{x}{+}d]=[b\overset{x}{+}c,\infty\,|\,b,b\overset{x}{+}d].$$

Auf Grund von (6') und (3) gilt:

$$[b\overset{x}{+}c,\infty\,|\,b,b\overset{x}{+}d]=[c,\infty\,|\,0,d]=[0,\infty\,|\,c,c\overset{x}{-}d].$$

Hiermit ist Hilfssatz 4 bewiesen.

---

[20]) Die beiden letzten Trennsymbole haben wegen (4) den gleichen Wert.

Betrachtet man jetzt die linke Seite von (1), so kann man sie, indem man nacheinander Hilfssatz 1, Beziehung (2), Hilfssatz 2, 1, 3 und das Monotoniegesetz der Multiplikation anwendet, so umformen, daß man die rechte Seite erhält:

$$o\big((m,r,c)-(n,r,c)\big)=o\big((m,r,c)\overset{r}{-}(n,r,c)\big)=o\big((mr\overset{r}{+}c)\overset{r}{-}(nr\overset{r}{+}c)\big)$$
$$=o(mr\overset{r}{-}nr)=o(mr-nr)=o\big((m-n)r\big)=o(m-n)\cdot o(r).$$

Für den Beweis des starken Monotoniegesetzes werden noch drei weitere Hilfssätze benötigt. — Geht man von einem anderen Grunddreieck aus, so gelangt man im allgemeinen zu einem anderen ternären Ring $\mathfrak{M}^*$. Läßt sich zwischen den beiden x-Achsen eine Perspektivität π angeben mit $\pi(0)=0^*$, $\pi(e)=e^*$ und $\pi(\infty)=\infty^*$, so kann man mit Hilfe von π die Anordnung von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}^*$ übertragen, indem man $o(a^*)=o\big(\pi(a)\big)=o(a)$ setzt. Man erhält dieselbe Anordnung, wenn man $o(a^*)=[0^*,\infty^*|e^*,a^*]$ setzt; denn $[0^*,\infty^*|e^*,a^*]$ hat wegen $\pi(0)=0^*$, $\pi(e)=e^*$, $\pi(\infty)=\infty^*$ und $\pi(a)=a^*$ denselben Wert wie $[0,\infty|e,a]=o(a)$. Zwischen diesen Anordnungen besteht die folgende Beziehung:

Hilfssatz 5.

(12) $$o(a^*-b^*)=o\big(\pi(a)-\pi(b)\big)=o(a-b)=o\big((a-b)^*\big)$$ [21].

Beweis. Nach (3) ist: $[0,\infty|a,a-b]=[a,\infty|0,b]$ und:

$$[0^*,\infty^*|a^*,a^*-b^*]=[a^*,\infty^*|0^*,b^*].$$

Da $(0,\infty,a,b,a-b)\sim(0^*,\infty^*,a^*,b^*,(a-b)^*)$ gilt, erhält man:

$[0^*,\infty^*|a^*,a^*-b^*]=[0,\infty|a,a-b]=[0^*,\infty^*|a^*,(a-b)^*]$, w. z. b. w.

Überdies möge jetzt für das folgende noch $\infty^*=\infty$, $\infty^{*\prime}=\infty'$ und $(\bar{e})=(\bar{e}^*)$ sein. Bezeichnen wir mit $\tilde{x}^*$ die Elemente aus $\mathfrak{M}^*$, für die $(\tilde{x}^*)=(x)$ gilt, so können wir folgende Aussage machen:

Hilfssatz 6.

(13) $$o(\tilde{a}^*-\tilde{b}^*)=o(a-b)=o\big((a-b)^*\big).$$

Beweis. Mit Hilfe von (3) kann man den folgenden Ausdruck umformen: $[0^*,\infty|e^*,\tilde{a}^*]=[0^*,\infty|e^*,\bar{e}^*]\cdot[0^*,\infty|\bar{e}^*,\tilde{a}^*]=[0,\infty|e,\bar{e}]\cdot[\infty',\infty|(\bar{e}),(a)]$ $=[0,\infty|e,\bar{e}]\cdot[0,\infty|\bar{e},a]=[0,\infty|e,a]=[0^*,\infty|e^*,a^*]$.
Deshalb gilt: $[0^*,\infty|a^*,\tilde{a}^*]=1$. Weiterhin ist wegen (3) und dieser letzten Beziehung:

$$[0^*,\infty|a^*,(a-b)^*]=[0,\infty|a,a-b]=[(a),\infty|\infty',(b)]=$$
$$=[(\tilde{a}^*),\infty|\infty',(b^*)]=[0,\infty|\tilde{a}^*,\tilde{a}^*-\tilde{b}^*]=[0,\infty|a^*,\tilde{a}^*-\tilde{b}^*].$$

Daher gilt:

$$o(\tilde{a}^*-\tilde{b}^*)=o\big((a-b)^*\big)=o(a-b),\quad \text{w. z. b. w.}$$

[21] Für die Verknüpfungsoperationen in $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^*$ werden dieselben Symbole verwandt. (a^*,b^*,c^*) bedeutet: Die ternäre Operation ist in $\mathfrak{M}^*$ auszuführen, entsprechend $a^*\pm b^*$ oder $a^*\cdot b^*$.

Hilfssatz 7. *Ist* $z' = 0^*$ *und* $(r+z)' = \hat{r}^{*\prime}$, *so gilt:* $o(r) = o(\hat{r}) = o(\hat{r}^*)$.

Beweis. An Hand von Fig. 12 erkennt man:

$$(0, \infty, r, r+z) \overset{\delta}{\sim} (\{0, \delta\}, \beta, \infty', r+z) \overset{(r)}{\sim} (0, z, \infty, r+z) \overset{z'}{\sim}$$
$$\overset{z'}{\sim} ((r+z)', (\bar{e}), \hat{r}^*, r+z) \overset{\infty'}{\sim} (0, \infty, \hat{r}, r+z).$$

Folglich ist $[0, \infty | r+z, r] = [0, \infty | r+z, \hat{r}]$ und damit $o(r) = o(\hat{r}) = o(\hat{r}^*)$.

Der erste Teil des starken Monotoniegesetzes ergibt sich jetzt aus den bewiesenen Teilergebnissen wie folgt: Wir betrachten neben dem gegebenen ternären Ring $\mathfrak{M}$ den ternären Ring $\mathfrak{M}^*$, der durch $0^* = z'$, $\infty^* = \infty$, $\infty^{*\prime} = \infty'$, $(\bar{e}^*) = (\bar{e})$ und $\pi(e) = e^*$, wobei π eine Perspektivität mit dem Zentrum ∞' ist, eindeutig festgelegt ist. Nach Hilfssatz 5 gilt dann:

$$o\big((m, r+z, a) - (n, r+z, b)\big) = o\big((m, r+z, a)^* - (n, r+z, b)^*\big).$$

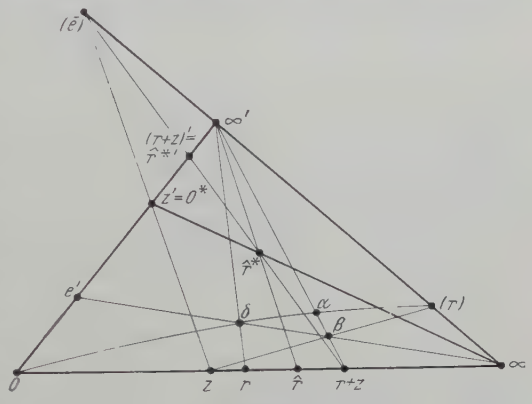

Fig. 12.

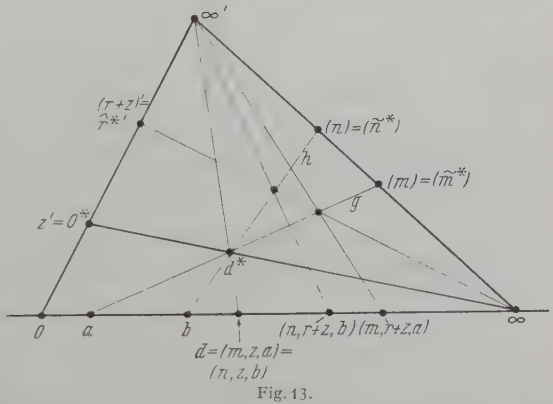

Fig. 13.

Da $(m, z, a) = (n, z, b) = d$ ist, haben die Geraden: $g: x = (m, y, a)$ und $h: x = (n, y, b)$ in $\mathfrak{M}^*$ die Gleichungen $g: x^* = (\tilde{m}^*, y^*, d^*)$ und $h: x^* = (\tilde{n}^*, y^*, d^*)$ (s. Fig. 13). Es ist daher: $(m, r+z, a)^* = (\tilde{m}^*, \hat{r}^*, d^*)$ und $(n, r+z, b)^* = (\tilde{n}^*, \hat{r}^*, d^*)$, wobei $\hat{r}^{*\prime} = (r+z)'$ ist. Die bewiesene Abschwächung des starken Monotoniegesetzes (1) gilt ja für die induzierte Anordnung jedes ternären Ringes. Man erhält daher:

$$o\big((m, r+z, a)^* - (n, r+z, b)^*\big) = o\big((\tilde{m}^*, \hat{r}^*, d^*) - (\tilde{n}^*, \hat{r}^*, d^*)\big)$$
$$= o(\tilde{m}^* - \tilde{n}^*) \cdot o(\hat{r}^*).$$

Nach Hilfssatz 6 und 7 ist nunmehr:

$$o(\tilde{m}^* - \tilde{n}^*) \cdot o(\hat{r}^*) = o(m-n) \cdot o(r).$$

Das Endresultat lautet somit:

$$o\big((m, r+z, a) - (n, r+z, b)\big) = o(m-n) \cdot o(r) \quad \text{für} \quad (m, z, a) = (n, z, b).$$

Als zweiter Teil bleibt noch $o\big((m,r,a)-(m,r,b)\big)=o(a-b)$ zu beweisen. Dieser folgt unter Zuhilfenahme von Beziehung (2), Hilfssatz 4 und 1 unmittelbar aus:

$$o\big((m,r,a)-(m,r,b)\big)=o\big((mr\overset{r}{+}a)\overset{r}{-}(mr\overset{r}{+}b)\big)=o(a\overset{r}{-}b)=o(a-b).$$

Hiermit ist vollständig bewiesen, daß die von einer Ordnungsfunktion mit Geradenrelation induzierte Anordnung dem starken Monotoniegesetz genügt.

Schließlich muß noch gezeigt werden, daß jede Ordnungsfunktion $h(\alpha)$ mit Geradenrelation auch wirklich mittels der induzierten starken Halbordnung erzeugbar ist. Definiert man mittels der starken Halbordnung (s. § 3) eine Ordnungsfunktion $\overline{h(\alpha)}$, so sind die abgeleiteten Ordnungsfunktionen zweiter Stufe $[h,k|\alpha,\beta]$ von $h(\alpha)$ und $\overline{h(\alpha)}$ wegen der Invarianz des Trennsymbols gegenüber Perspektivitäten identisch. Denn $[h,k|\alpha,\beta]=[\gamma,\delta|\alpha,\beta]$[22]) läßt sich durch Perspektivitäten so auf die x-Achse abbilden, daß dabei $\gamma\to 0$, $\delta\to\infty$, $\alpha\to e$ als Bildpunkte entsprechen. Für $[0,\infty|e,x]$ gilt:

$$[0,\infty|e,x]=h_y(e)\cdot h_y(x)\cdot\underbrace{l_\infty(e)\cdot l_\infty(x)}_{1}=o\big((e,e,0)\big)\cdot o\big((e,x,0)\big)=o(x)\text{[23])}.$$

Nach § 3 wissen wir aber, daß dann die Ordnungsfunktion $h(\alpha)$ auch erzeugbar ist, d.h. sie ist in der Form:

$$h(\alpha)=\overline{h(\alpha)}\,\{h\}\cdot\{\alpha\}$$

darstellbar. Hiermit ist unser *Hauptsatz* vollständig bewiesen.

Aus dem letzten Teil des Beweises ersieht man, daß eine mittels einer starken Halbordnung von $\mathfrak{M}$ erzeugte Ordnungsfunktion dieselbe starke Halbordnung in $\mathfrak{M}$ induziert. Es gilt daher der

Satz 11. *Jede starke Halbordnung von $\mathfrak{M}$ läßt sich durch eine passende Ordnungsfunktion mit Geradenrelation induzieren.*

Anhang: Ordnungsfunktionen in alternativen Ebenen[24]).

Die in § 3 und 4 gewonnenen Ergebnisse lassen sich in einfacher Weise auf Ordnungsfunktionen in *alternativen* Ebenen übertragen. In jeder alternativen Ebene ist der ihr entsprechende ternäre Ring bekanntlich ein *Alternativkörper*. In einem Alternativkörper läßt sich die ternäre Operation in Multiplikation und Addition aufspalten. Es ist also $(a,b,c)=ab+c$. Außerdem genügt ein Alternativkörper bis auf das Assoziativgesetz der Multiplikation allen Körpergesetzen. Auf Grund dieser Tatsachen schrumpft für die

[22]) γ bzw. δ sollen die Schnittpunkte von h bzw. k mit der Verbindungsgeraden von α,β repräsentieren.

[23]) 0 und ∞ sind hier durch die Geraden h_y: $(e,y,0)=0$ und l_∞ ersetzt worden. Es ist $o\big((e,e,0)\big)=o(e)=1$ und $o\big((e,x,0)\big)=o(ex)=o(e)\cdot o(x)=o(x)$.

[24]) Zur Definition der alternativen Ebene s. R. MOUFANG [3].

Anordnungen eines Alternativkörpers das starke Monotoniegesetz auf das gewöhnliche Monotoniegesetz der Multiplikation zusammen. Es gilt also

Satz 11a. *In einer alternativen Ebene wird jede Halbordnung des Koordinatenbereiches von einer geeigneten Ordnungsfunktion mit Geradenrelation induziert.*

In einer alternativen Ebene lassen sich jedoch die Ordnungsfunktionen nicht wie in einer desarguesschen Ebene mit Hilfe von Skalarprodukten normierter Koordinatenvektoren definieren[25]), sondern nur auf die in § 3 beschriebene Weise.

§ 5. Einfache Ordnungsfunktionen.

Wie in § 1 bereits erwähnt wurde, gelten wegen Satz 2 und 3 die Sätze 14 und 15 aus [5] auch in allen projektiven Ebenen. Satz 15 aus [5] besagt: Sind $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ irgend vier verschiedene Punkte einer Geraden und bezeichnet Z die Anzahl derjenigen unter den Trennsymbolen $[\alpha_0, \alpha_1|\alpha_2, \alpha_3]$, $[\alpha_0, \alpha_2|\alpha_1, \alpha_3]$, $[\alpha_0, \alpha_3|\alpha_1, \alpha_2]$ welche $=-1$ sind, so ist bei einer harmonischen Ordnungsfunktion stets $Z=1$ oder 3, bei einer anharmonischen Ordnungsfunktion hingegen stets $Z=0$ oder 2.

Eine Ordnungsfunktion, bei der Z nicht gemischt, sondern rein vorkommt, d.h. wo Z bei allen linearen Quadrupeln denselben Wert hat, heißt *einfach*[2]).

Der Fall $Z=0$ ist ohne Interesse, da hier für alle Punktequadrupel der Wert des Trennsymbols $+1$ ist. Dies hat für die induzierte Anordnung des ternären Ringes zur Folge, daß alle Elemente des Ringes >0 sind. — Für den Fall $Z=1$ hat bereits E. Sperner[26]) unter Voraussetzung von Satz 15 aus [5] für nicht notwendig desarguessche Geometrien gezeigt, daß die induzierte Anordnung dem Monotoniegesetz der Addition[27]) genügt.

Wenn wir Fig. 10 mit Fig. 12 aus [5] vergleichen, so erkennen wir, daß für $ab>0$ und $c>0$ stets $ab\overset{b}{+}c=(a,b,c)>0$ ist. Wir erhalten also für $Z=1$ folgendes ternäres Monotoniegesetz: *Aus* $a>0$, $b>0$, $c\geqq 0$ *oder aus* $a<0$, $b<0$, $c\geqq 0$ *folgt stets* $(a,b,c)>0$.

Im Fall $Z=2$ hingegen, gilt das folgende ternäre Antimonotoniegesetz:

Aus $a>0$, $b>0$, $c>0$ *oder aus* $a<0$, $b<0$, $c>0$ *folgt* $(a,b,c)\leqq 0$.

Aus $a>0$, $b<0$, $c<0$ *oder aus* $a<0$, $b>0$, $c<0$ *folgt* $(a,b,c)\geqq 0$.

Zum Beweise genügt es zu zeigen, daß aus $o(ab)=o(c)$ und $(a,b,c)\neq 0$ stets $o\big((a,b,c)\big)=-o(ab)=-o(c)$ folgt. — Die Punkte $0, \infty, ab, \overset{b}{-}ab$ bilden ein harmonisches Quadrupel (vgl. Fig. 9), d.h. wegen $Z=2$ gilt $[0,\infty|ab,\overset{b}{-}ab]=+1$. Da nach Voraussetzung $o(ab)=o(c)$ ist, gilt $[0,\infty|ab,c]=+1$. Multiplikation der beiden Trennsymbole ergibt: $[0,\infty|c,\overset{b}{-}ab]=1$. Auf Grund von (6′) aus § 4 gilt:

$$\big(0,\infty,c,\overset{b}{-}ab\big)\sim\big(ab,\infty,ab\overset{b}{+}c,ab\overset{b}{+}(\overset{b}{-}ab)\big)=\big(ab,\infty,(a,b,c),0\big),$$

[25]) Vgl. [6] S. 7 Vorschrift I.

[26]) Siehe [5] S. 130.

[27]) Das *Monotoniegesetz der Addition* besagt: *Ist* $a>0$ *und* $b>0$, *so folgt* $a+b>0$.

d.h. es ist auch $[ab, \infty | (a, b, c), 0] = +1$. Folglich gilt (wegen $Z=2$) $[0, \infty | ab, (a, b, c)] = -1$ und damit $o(c) = o(ab) = -o(a, b, c)$ w. z. b. w.

Satz 12. *Läßt sich in einer projektiven Ebene eine einfache nichttriviale anharmonische Ordnungsfunktion ($Z=2$) angeben, so hat die Geometrie den Primkörper der Charakteristik 5 als Koordinatenbereich und ist somit desarguessch.*

Der *Beweis* wird erbracht durch den Nachweis, daß nur die Elemente e und $-e > 0$ sein können und daß es genau so viele Elemente >0 wie <0 gibt.

Wir nehmen an, der ternäre Ring enthalte ein Element $a \neq e, -e$ mit $a > 0$. Es gilt also:

(1) $$[0, \infty | e, a] = +1$$

und wegen Satz 6 auch

(2) $$[0, \infty | e, -a] = +1.$$

Wegen $Z=2$ hat (1) zur Folge:

(3) $[0, e | \infty, a] = -1$ und (4) $[0, a | \infty, e] = -1$.

(1) und (2) multipliziert, ergibt:

(5) $$[0, \infty | a, -a] = +1$$

und damit auch ($Z=2$!):

(6) $$[0, a | \infty, -a] = -1.$$

(6) und (4) multipliziert, ergibt:

(7) $$[0, a | e, -a] = +1$$

und damit auch:

(8) $$[0, e | a, -a] = -1.$$

Multiplizieren wir schließlich noch (8) und (3), so folgt:

$$[0, e | \infty, -a] = +1 \quad \text{und damit auch:} \quad [0, \infty | e, -a] = -1.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu (2). Es kann also außer e und $-e$ keine Elemente >0 geben.

Nun zeigen wir, daß in jedem ternären Ring mit einer nichttrivialen Halbordnung die Anzahl N der Elemente >0 gleich der Anzahl M der Elemente <0 ist. $\{a_\nu\}$ sei die Menge der Elemente >0 und $\{b_\nu\}$ die Menge der Elemente <0. Die Elemente $b_1 b_\nu$ sind wegen der Eindeutigkeit der Multiplikation alle verschieden. Wegen dem Monotoniegesetz der Multiplikation sind sie in der Menge $\{a_\nu\}$ enthalten. Also gilt: $M \leq N$. Andererseits sind ebenfalls die Elemente $b_1 a_\nu$ alle verschieden und wegen dem Monotoniegesetz der Multiplikation in der Menge $\{b_\nu\}$ enthalten. Folglich ist $N \leq M$ und aus beiden Ungleichungen folgt: $N = M$.

Unser ternärer Ring kann also nur fünf Elemente enthalten, d.h. jede Gerade der zugehörigen projektiven Ebene enthält genau sechs Punkte. Wie

C. R. Mac Innes und H. B. Mann[28]) bewiesen haben, gibt es nur eine projektive Geometrie, in der jede Gerade mit genau sechs Punkten inzidiert, nämlich die desarguessche Geometrie mit dem Primkörper der Charakteristik 5 als Koordinatenbereich.

Im Fall $Z = 3$ schließlich kommt wieder nur der Primkörper der Charakteristik 3 als Koordinatenbereich in Frage; hier bleibt mit geringfügigen Änderungen der Beweis des desarguesschen Falles in Geltung[29]).

Literatur.

[1] Hall, M.: Projective Planes. Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 229—277 (1943). — [2] Hessenberg, G.: Über einen geometrischen Kalkül. Acta Math. **29**, 1—23 (1905). — [3] Moufang, R.: Alternativkörper und der Satz vom vollständigen Vierseit (D^9), Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **9**, 207—222 (1933). — [4] Skornyakow, L. A.: Natural Domains of Veblen-Wedderburn Projective Planes. Amer. Math. Soc., Translation Nr. **58** (1951). — [5] Sperner, E.: Die Ordnungsfunktion einer Geometrie. Math. Ann. **121**, 107—130 (1949). — [6] Sperner, E.: Beziehungen zwischen geometrischer und algebraischer Anordnung. Sitzungsber. Heidelberg. Akad. Wiss. **1949**, 10. Abh. — [7] Sperner, E.: Konvexität bei Ordnungsfunktionen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **16**, 140—154 (1949).

[28]) MacInnes, C. R.: Finite planes with less than eight points on a line. Amer. Math. Monthly **14**, 171—174 (1907) und Mann, H. B.: On orthogonal Latin squares. Bull. Amer. Math. Soc. **50**, 249—257 (1944).

[29]) Siehe [6] S. 37.

Hamburg, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 15. Januar 1955.)

MÜLLER, M.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 292—309 (1955)

Über Interpolation mittels ganzer rationaler Funktionen.

Von
MAX MÜLLER.

Herr U. WEGNER[1]) hat als erster, und zwar auf drei verschiedenen Wegen, die Aufgabe gelöst, das Fehlerglied der Lagrangeschen Interpolationsformel durch eine Ableitung der interpolierten Funktion $f(x)$ auszudrücken, deren Ordnung zwischen 1 und der Anzahl der Interpolationsstellen (je einschließlich) beliebig vorgeschrieben werden darf. Wenn die untereinander verschiedenen Interpolationsstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ und auch die Stelle x dem Intervall $[0, 1]$ angehören, $P_n(x)$ das Polynom höchstens n-ten Grades ist, das den Bedingungen

$$P_n(x_\nu) = f(x_\nu) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

genügt und r eine beliebig ausgewählte der Zahlen $1, 2, \ldots, n+1$ bedeutet, ergibt sich eine Formel der Gestalt

$$(*) \qquad R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \int_0^1 f^{(r)}(t)\, K_r(t, x)\, dt.$$

Auf dem ersten Wege stellt Herr WEGNER nach dem Vorgange von W. WIRTINGER[2]), [3]) den Kern $K_r(t, x)$ mittels der Funktionen $\mathfrak{B}_r(u) = B_r(u - [u])$ dar, die mit den Bernoullischen Polynomen $B_r(t)$ gebildet sind, und benutzt dabei die Fourierentwicklungen von $\mathfrak{B}_r(u)$ und $f^{(r)}(t - [t])$. Auf dem zweiten Wege wird $K_r(t, x)$ durch die Greensche Funktion der Randwertaufgabe

$$y^{(n+1)} = 0, \qquad y(x_\nu) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

ausgedrückt. Auf dem dritten Wege wird (*) aus der Eulerschen Summenformel gewonnen. Da man diese herleiten kann, indem man lediglich die definierenden Eigenschaften der Funktionen $\mathfrak{B}_r(u)$, nicht aber — wie es noch WIRTINGER[2]) tat — deren Fourierentwicklungen benutzt[4]), wird damit die Formel (*) mittels ganz einfacher Sätze der Analysis zugänglich[5]).

---

[1]) WEGNER, U.: Zur Theorie der Interpolation. Dtsch. Math. **1**, 103—107, 352—358 (1935).

[2]) WIRTINGER, W.: Einige Anwendungen der Euler-Maclaurinschen Summenformel insbesondere auf eine Aufgabe von Abel. Acta math. **26**, 255—271, bes. 256—259 (1902).

[3]) WIRTINGER, W.: Über das Fehlerglied bei numerischer Integration. Z. angew. Math. Mech. **13**, 166—168 (1933).

[4]) Vgl. etwa NÖRLUND, N. E.: Vorlesungen über Differenzenrechnung, S. 17—30. Berlin: Springer 1924.

[5]) Entsprechend hat Herr TOLLMIEN die Wirtingersche Herleitung des Fehlergliedes bei numerischer Quadratur [vgl. [3])] vereinfacht. Vgl. TOLLMIEN, W.: Über das Restglied der Mittelwertformeln für angenäherte Quadratur. Z. angew. Math. Mech. **29**, 193—198 (1949).

Man kann aber auch die Einführung der Funktionen $\mathfrak{B}_r(u)$ vermeiden. So entsteht eine besonders einfache und elementare Herleitung der Formel (*) und eine Darstellung des Kernes $K_r(t, x)$ mittels ganz einfacher, explizit angebbarer Funktionen, die sich im Sonderfall $r = n+1$ auch bei G. Kowalewski[6]) findet und aus der die Wegnerschen Darstellungen für den Kern und auch eine weitere Kowalewskische Formel für das Fehlerglied leicht hergeleitet werden können.

Dies möchte ich in der vorliegenden Arbeit auseinandersetzen. Ich betrachte aber sogleich die allgemeinere Interpolationsaufgabe, bei der an den Interpolationsstellen das Interpolationspolynom mit der interpolierten Funktion außer in den Funktionswerten auch in den Werten der Ableitungen bis zu einer gewissen (von Interpolationsstelle zu Interpolationsstelle auch verschieden wählbaren) Ordnung hin übereinstimmen soll. Mit der Berechnung des Interpolationspolynomes in diesem allgemeineren Fall hat sich schon C. G. J. Jacobi[7]) beschäftigt; wir zeigen in § 1 einen einfacheren Weg zur Berechnung. Eine Formel für das Fehlerglied hat unter speziellen Voraussetzungen Ch. Hermite[8]) angegeben. Wir übertragen in § 2 die Cauchysche Fehlergliedformel für das Lagrangesche Interpolationspolynom[9]) auf den allgemeineren Fall und geben in § 3 in Verallgemeinerung der Wegnerschen Untersuchung eine Fehlergliedformel, in die eine Ableitung der interpolierten Funktion eingeht, deren Ordnung die Ordnungen der an den Interpolationsstellen vorgeschriebenen Ableitungen übertreffen muß, im übrigen aber bis zur Zahl der Interpolationsbedingungen beliebig vorgeschrieben werden darf. In § 4 werden einige Umformungen des Ergebnisses angegeben, und in § 5 wird als Anwendung in wenigen Zeilen die allgemeine Quadraturformel gewonnen, die Herr A. Kneschke[10]) im Rahmen einer von der Interpolationstheorie losgelösten Theorie der genäherten Quadratur aufgestellt hat.

§ 1. Aufstellung der Interpolationsformel.

1. Es seien $x_0, x_1, \ldots, x_s$ verschiedene Stellen, deren jeder eine natürliche Zahl α_σ zugeordnet ist; für jedes σ aus der Reihe der Zahlen $0, 1, \ldots, s$ seien außerdem α_σ Werte $y_\sigma^{(0)}, y_\sigma^{(1)}, \ldots, y_\sigma^{(\alpha_\sigma - 1)}$ gegeben, etwa die Werte, die eine

[6]) Kowalewski, G.: Entwicklung einer Funktion nach Lagrangeschen Polynomen und ihren Integralen. Dtsch. Math. **3**, 275—280 (1938). Spezialfall $p = 0$ der dortigen Formel (3).

[7]) Jacobi, C. G. J.: Inaugural-Dissertation Berlin 1825. [= Gesammelte Werke **3**, 1—13.]

[8]) Hermite, Ch.: Sur la formule d'interpolation de Lagrange (Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. Borchardt). J. reine u. angew. Math. **84**, 70—79 (1878) [= Oeuvres de Charles Hermite **3**, 432—443 (1912)]. Hermite stellt das Fehlerglied durch ein $(n+1)$-fach iteriertes Integral dar, in dessen Integrand $f^{(n+1)}(x)$ auftritt. Hermite behandelt auch den Fall, daß $f(x)$ eine analytische Funktion einer komplexen Veränderlichen x ist.

[9]) Cauchy, A. L.: Sur les fonctions interpolatoires. C. R. Acad. Sci. Paris **11**, 775—789 (1840) [= Oeuvres (1) **5**, 409—424 (1895)]. Vgl. etwa auch N. E. Nörlund[4]), S. 14.

[10]) Kneschke, A.: Theorie der genäherten Quadratur. J. reine u. angew. Math. **187**, 115—128, bes. S. 120 (1949).

Funktion und ihre Ableitungen an diesen Stellen annehmen:

$$y_\sigma^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}(x_\sigma) \qquad (\sigma = 0, 1, \ldots, s;\ \alpha = 0, 1, \ldots, \alpha_\sigma - 1).$$

Es sei

$$(1) \qquad \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_s = n + 1, \qquad \operatorname{Max}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) = k.$$

Wir suchen ein Polynom $P_n(x)$ höchstens n-ten Grades, das die Bedingungen

$$(2) \qquad P_n^{(\beta)}(x_\tau) = y_\tau^{(\beta)} \qquad (\tau = 0, 1, \ldots, s;\ \beta = 0, 1, \ldots, \alpha_\tau - 1)$$

erfüllt und sich in der Form

$$(3) \qquad P_n(x) = \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} y_\sigma^{(\alpha)} L_{\sigma\alpha}(x)$$

darstellen läßt, wo die Koeffizienten $L_{\sigma\alpha}(x)$ Polynome sind, die nur von den Interpolationsstellen $x_0, x_1, \ldots, x_s$ und den für diese vorgeschriebenen Ordnungen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$, nicht aber von den Werten $y_\sigma^{(\alpha)}$ abhängen.

Im Spezialfall $s = n$, $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$ wird diese Aufgabe durch das Lagrangesche Interpolationspolynom gelöst.

2. Wir zeigen zunächst, daß die gestellte Aufgabe genau dann lösbar ist, wenn man die Polynome $L_{\sigma\alpha}(x)$ so bestimmen kann, daß

$$(4) \quad L_{\sigma\alpha}^{(\beta)}(x_\tau) = \delta_{\sigma\tau}\delta_{\alpha\beta} \quad (\sigma, \tau = 0, 1, \ldots, s;\ \alpha = 0, 1, \ldots, \alpha_\sigma - 1;\ \beta = 0, 1, \ldots, \alpha_\tau - 1)^{11}).$$

In der Tat: Sind die Bedingungen (4) erfüllt, so ist nach (3)

$$P_n^{(\beta)}(x_\tau) = \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} y_\sigma^{(\alpha)} L_{\sigma\alpha}^{(\beta)}(x_\tau) = y_\tau^{(\beta)}$$

für $\tau = 0, 1, \ldots, s$; $\beta = 0, 1, \ldots, \alpha_\tau - 1$, also (2) erfüllt. Die Bedingungen sind also hinreichend.

Daß sie auch notwendig sind, erkennt man folgendermaßen: Wählt man die Zahlen $y_\sigma^{(\alpha)}$ insbesondere so, daß bei fester Wahl des τ aus den Zahlen $0, 1, \ldots, s$ und bei fester Wahl des β aus den Zahlen $0, 1, \ldots, \alpha_\tau - 1$

$$(5) \qquad y_\sigma^{(\alpha)} = \delta_{\sigma\tau}\delta_{\alpha\beta} \qquad (\sigma = 0, 1, \ldots, s;\ \alpha = 0, 1, \ldots, \alpha_\sigma - 1),$$

so folgt aus (2), (3) und (5), daß

$$1 = y_\tau^{(\beta)} = P_n^{(\beta)}(x_\tau) = \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} y_\sigma^{(\alpha)} L_{\sigma\alpha}^{(\beta)}(x_\tau) = L_{\tau\beta}^{(\beta)}(x_\tau)$$

sein muß; wählt man ferner τ' aus den Zahlen $0, 1, \ldots, s$ und β' aus den Zahlen $0, 1, \ldots, \alpha_{\tau'} - 1$ so, daß $|\tau' - \tau| + |\beta' - \beta| > 0$, so folgt aus (2), (3) und (5), daß

$$0 = y_{\tau'}^{(\beta')} = P_n^{(\beta')}(x_{\tau'}) = \sum_{\sigma\ 0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} y_\sigma^{(\alpha)} L_{\sigma\alpha}^{(\beta')}(x_{\tau'}) = L_{\tau\beta}^{(\beta')}(x_{\tau'})$$

sein muß. Also müssen die $L_{\sigma\alpha}(x)$ die Bedingungen (4) erfüllen; dieselben sind auch notwendige Bedingungen.

---

[11]) Es bedeutet $\delta_{ik} = 0$ für $i \neq k$, $\delta_{ii} = 1$.

3. Wir wollen hier gleich die Frage klären, ob man die Bedingungen (5) auch erfüllen kann, wenn die $y_\sigma^{(\alpha)}$ die Werte sind, die eine r-mal $(r \geqq k-1)$ stetig differentiierbare Funktion $f_*(x)$ und ihre Ableitungen an den Interpolationsstellen annehmen. Dazu verstehen wir unter $x_\tau = \xi$ irgendeine der Interpolationsstellen und betrachten eine beiderseitige Umgebung $\xi' \leqq x \leqq \xi''$ derselben, in der keine weitere Interpolationsstelle liegt. Wir setzen

$$f_*(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \leqq \xi' \quad \text{und für} \quad x \geqq \xi''. \tag{6}$$

In jedem der beiden Intervalle $\xi' \leqq x \leqq \xi$ und $\xi \leqq x \leqq \xi''$ setzen wir $f_*(x)$ in der Form

$$f_*(x) = \frac{1}{\beta!}(x-\xi)^\beta + c_0(x-\xi)^{r+1} + \cdots + c_r(x-\xi)^{2r+1} \tag{7}$$

an. Dann ist jedenfalls in jedem dieser beiden Intervalle $f_*(x)$ beliebig oft differentiierbar und, ob nun ξ als rechter Endpunkt des linken oder linker Endpunkt des rechten Teilintervalles betrachtet wird,

$$f_*^{(\alpha)}(\xi) = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, r), \tag{8}$$

also $f_*(x)$ im Intervall $\xi' \leqq x \leqq \xi''$ r-mal stetig differentiierbar. Können wir noch die Koeffizienten $c_0, \ldots, c_r$ für jedes Teilintervall so bestimmen, daß

$$f_*^{(\alpha)}(\xi') = 0, \quad \text{bzw.} \quad f_*^{(\alpha)}(\xi'') = 0 \quad \text{für} \quad \alpha = 0, 1, \ldots, r,$$

so ist $f_*(x)$ für $-\infty < x < +\infty$ r-mal stetig differentiierbar, und die Werte $f_*^{(\alpha)}(x_\sigma) = y_\sigma^{(\alpha)}$ erfüllen nach (6) und (8) die Bedingungen (5).

Solche Bestimmung der Koeffizienten $c_0, \ldots, c_r$ ist aber möglich; sie führt nämlich, wenn wir $\xi' - \xi = t$, bzw. $\xi'' - \xi = t$ setzen, jeweils auf ein System von $r+1$ inhomogenen linearen Gleichungen für diese $r+1$ Koeffizienten, dessen Determinante

$$D = t^{(r+1)^2} D_{r+1}$$

ist, wenn allgemein

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r+1 & r+2 & \ldots & r+\varrho \\ (r+1)r & (r+2)(r+1) & \ldots & (r+\varrho)(r+\varrho-1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (r+1)r\ldots(r+1-\varrho+2) & (r+2)(r+1)\ldots(r+2-\varrho+2) & \ldots & (r+\varrho)(r+\varrho-1)\ldots(r+2) \end{vmatrix}$$

gesetzt wird. Subtrahiert man in D_ϱ in jeder Spalte die Elemente der vorhergehenden, von rechts beginnend, und entwickelt man die so umgeformte Determinante nach den Elementen der ersten Zeile, so ergibt sich die Rekursionsformel

$$D_\varrho = (\varrho - 1)!\, D_{\varrho-1}.$$

Da $D_2 = 1$ ist, wird damit

$$D = t^{(r+1)^2} r!\,(r-1)!\ldots 2!\,1!.$$

Hiernach ist $D \neq 0$, die Bestimmung der Koeffizienten $c_0, \ldots, c_r$ also eindeutig möglich. Die Existenz einer Funktion $f_*(x)$ mit den gewünschten Eigenschaften steht also fest.

4. Für das Interpolationspolynom der soeben konstruierten Funktion $f_*(x)$ ergibt sich

$$P_{n*}(x) = \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} f_*^{(\alpha)}(x_\sigma)\, L_{\sigma\alpha}(x) = L_{\tau\beta}(x).$$

Da $P_n(x)$ höchstens den Grad n haben soll, hat also auch $L_{\tau\beta}(x)$ höchstens den Grad n. Wegen der Freiheit, die wir bei der Konstruktion der Funktion $f_*(x)$ in der Wahl von τ und β hatten, ist also der Grad jedes der Polynome $L_{\tau\beta}(x)$ $(\tau = 0, 1, \ldots, s;\ \beta = 0, 1, \ldots, \alpha_\tau - 1)$ höchstens gleich n.

5. Die Bedingungen (4) besagen zunächst, daß das Polynom höchstens n-ten Grades $L_{\sigma\alpha}(x)$ an der Stelle x_τ mit $\tau \neq \sigma$ mitsamt den $a_\tau - 1$ ersten Ableitungen verschwindet, daß also die Stelle x_τ mindestens a_τ-fache Nullstelle von $L_{\sigma\alpha}(x)$ ist. Daher muß $L_{\sigma\alpha}(x)$ die Form

$$L_{\sigma\alpha}(x) = p_\sigma(x)\, \Lambda_{\sigma\alpha}(x) \tag{9}$$

haben, wo zur Abkürzung

$$p_\sigma(x) = (x - x_0)^{\alpha_0} \ldots (x - x_{\sigma-1})^{\alpha_{\sigma-1}} (x - x_{\sigma+1})^{\alpha_{\sigma+1}} \ldots (x - x_s)^{\alpha_s} \tag{10}$$

gesetzt, also $p_\sigma(x)$ ein Polynom vom Grade $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_s - \alpha_\sigma = n + 1 - \alpha_\sigma$ ist und $\Lambda_{\sigma\alpha}(x)$ ein weiteres Polynom bedeutet. Da der Grad von $L_{\sigma\alpha}(x)$ nicht größer als n sein kann und $p_\sigma(x)$ den Grad $n + 1 - \alpha_\sigma$ hat, ist der Grad von $\Lambda_{\sigma\alpha}(x)$ höchstens gleich $\alpha_\sigma - 1$.

Die Bestimmung von $\Lambda_{\sigma\alpha}(x)$ gelingt nun folgendermaßen: Nach (4) und (9) muß

$$L_{\sigma\alpha}^{(\beta)}(x_\sigma) = \sum_{\gamma=0}^{\beta} \binom{\beta}{\gamma} p_\sigma^{(\beta-\gamma)}(x_\sigma)\, \Lambda_{\sigma\alpha}^{(\gamma)}(x_\sigma) = \delta_{\alpha\beta}$$

sein. Dies verlangt für $\beta = 0$, weil $p_\sigma(x_\sigma) \neq 0$ ist, daß

$$\Lambda_{\sigma\alpha}(x_\sigma) = \frac{\delta_{\alpha 0}}{p_\sigma(x_\sigma)} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, \alpha_\sigma - 1), \tag{11}$$

und für $\beta \geq 1$, daß

$$\Lambda_{\sigma\alpha}^{(\beta)}(x_\sigma) = \frac{1}{p_\sigma(x_\sigma)} \left[\delta_{\alpha\beta} - \sum_{\gamma=0}^{\beta-1} \binom{\beta}{\gamma} p_\sigma^{(\beta-\gamma)}(x_\sigma)\, \Lambda_{\sigma\alpha}^{(\gamma)}(x_\sigma) \right]. \tag{12}$$

Aus (11) und (12) können schrittweise die Werte der Ableitungen von $\Lambda_{\sigma\alpha}(x)$ an der Stelle x_σ berechnet werden. $\Lambda_{\sigma\alpha}(x)$ ergibt sich dann aus der Formel

$$\begin{cases} \Lambda_{\sigma\alpha}(x) = \Lambda_{\sigma\alpha}(x_\sigma) + \frac{1}{1!} \Lambda'_{\sigma\alpha}(x_\sigma)\,(x - x_\sigma) + \cdots \\ \qquad + \frac{1}{(\alpha_\sigma - 1)!} \Lambda_{\sigma\alpha}^{(\alpha_\sigma - 1)}(x_\sigma)\,(x - x_\sigma)^{\alpha_\sigma - 1}. \end{cases} \tag{13}$$

Aus (9), (10) und (13) ergibt sich dann in eindeutiger Weise $L_{\sigma\alpha}(x)$.

6. Beispiele. Im Falle $s=0$, $\alpha_0=n+1$ ist nach (4)

$$L_{0\alpha}(x)=\frac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!},$$

also

$$P_n(x)=\sum_{\alpha=0}^{n} f^{(\alpha)}(x_0)\,\frac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!},$$

d.h. $P_n(x)$ das Taylorsche Polynom n-ten Grades für $f(x)$ an der Stelle x_0.

Im Spezialfall $s=n$, $\alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_n=1$ wird

$$p_\sigma(x)=(x-x_0)\,(x-x_1)\ldots(x-x_{\sigma-1})\,(x-x_{\sigma+1})\ldots(x-x_n);$$

für α kommt nur der Wert 0 in Betracht, $A_{\sigma 0}(x)$ ist vom Grad 0, nämlich nach (11)

$$A_{\sigma 0}(x)=A_{\sigma 0}(x_\sigma)=\frac{1}{p_\sigma(x_\sigma)};$$

es wird

$$P_n(x)=\sum_{\sigma=0}^{n} f(x_\sigma)\,\frac{p_\sigma(x)}{p_\sigma(x_\sigma)},$$

d.h. das Lagrangesche Interpolationspolynom.

Schließlich erhält man im Spezialfall $\alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_s=2$ die folgenden Ausdrücke:

$$L_{\sigma 0}(x)=\frac{p_\sigma(x)}{p_\sigma(x_\sigma)}\left(1-\frac{p'_\sigma(x_\sigma)}{p_\sigma(x_\sigma)}\,(x-x_\sigma)\right),\qquad L_{\sigma 1}(x)=\frac{p_\sigma(x)}{p_\sigma(x_\sigma)}\,(x-x_\sigma)$$
$$(\sigma=0,1,\ldots,s).$$

Von diesem Spezialfall hat Herr L. Fejér Gebrauch gemacht, um den Weierstraßschen Approximationssatz zu beweisen[12]).

§ 2. Übertragung der Cauchyschen Fehlergliedformel.

$f(t)$ sei im Intervall $a\leqq t\leqq b$ $(k-1)$-mal differentiierbar und in seinem Innern r-mal differentiierbar, wo $k-1\leqq r\leqq n+1$. Dem Intervall $a\leqq t\leqq b$ sollen die Stellen $x, x_0, \ldots, x_s$ angehören. Die Stelle x falle zunächst mit keiner der Interpolationsstellen $x_0, \ldots, x_s$ zusammen. Wir setzen

$$P_n(x)=\sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1} f^{(\alpha)}(x_\sigma)\,L_{\sigma\alpha}(x)$$

und bilden die Funktion

$$\Phi(t)=f(t)-P_n(t)-\frac{(t-x_0)^{\alpha_0}\cdots(t-x_s)^{\alpha_s}}{(x-x_0)^{\alpha_0}\cdots(x-x_s)^{\alpha_s}}\,[f(x)-P_n(x)], \tag{14}$$

die ebenfalls im Intervall $a\leqq t\leqq b$ $(k-1)$-mal und in $a<t<b$ r-mal differentiierbar ist. Es ist

$$\Phi^{(\alpha)}(x_\sigma)=0 \quad \text{für} \quad \sigma=0,1,\ldots,s;\quad \alpha=0,1,\ldots,\alpha_\sigma-1 \tag{15}$$

[12]) Fejér, L.: Über Weierstraßsche Approximation, besonders durch Hermitesche Interpolation. Math. Annalen **102**, 707—725 (1930). Den Hinweis auf diese Fejérschen Untersuchungen verdanke ich Herrn H. Kneser.

und auch $\Phi(x)=0$. Nach (15) hat $\Phi(t)$ an der Stelle x_σ eine Nullstelle mindestens der Ordnung α_σ.

Die Anzahl der Stellen x_σ, an denen $\alpha_\sigma=\varkappa$ ist, sei $\lambda_\varkappa$ $(\varkappa=1, 2, \ldots, k)$. Dann ist

$$\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\cdots+k\lambda_k=\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_s=n+1 \tag{16}$$

und

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=s+1. \tag{17}$$

Die Menge der Interpolationsstellen x_σ, für welche $\alpha_\sigma\geqq\varkappa$, bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}_\varkappa$. $\mathfrak{N}_{\varkappa+1}$ ist (echte oder unechte) Untermenge von $\mathfrak{N}_\varkappa$.

$\Phi(t)$ hat die $s+2$ verschiedenen Nullstellen $x, x_0, \ldots, x_s$; zwischen je zwei benachbarten dieser Stellen liegt nach dem Rolleschen Satz mindestens eine Nullstelle von Φ'; das sind mindestens $s+1$ verschiedene Nullstellen von Φ', die nicht zu $\mathfrak{N}_1$ gehören; außerdem verschwindet Φ' an den Stellen von $\mathfrak{N}_2$; das sind $\lambda_2+\cdots+\lambda_k$ von den vorigen und untereinander verschiedene Stellen; insgesamt hat also Φ' mindestens

$$s+1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=s_1$$

verschiedene Nullstellen. Zwischen je zwei benachbarten dieser s_1 Stellen hat nach dem Rolleschen Satz Φ'' mindestens eine Nullstelle; das sind mindestens s_1-1 verschiedene Nullstellen; keine dieser Stellen gehört (auch wenn sie Interpolationsstelle sein sollte) zu $\mathfrak{N}_2$; keine dieser s_1-1 Stellen gehört also zu $\mathfrak{N}_3$; außerdem hat Φ'' die Stellen von $\mathfrak{N}_3$ zu Nullstellen; das sind $\lambda_3+\cdots+\lambda_k$ weitere, von den vorigen und untereinander verschiedene Nullstellen; insgesamt hat also Φ'' mindestens

$$s_1-1+\lambda_3+\cdots+\lambda_k=s_2$$

verschiedene Nullstellen. Analog ergibt sich, daß Φ''' mindestens

$$s_2-1+\lambda_4+\cdots+\lambda_k=s_3$$

verschiedene Nullstellen hat, usw.; $\Phi^{k-1}(t)$ hat mindestens

$$s_{k-2}-1+\lambda_k=s_{k-1}$$

und $\Phi^{(k)}(t)$ mindestens $s_{k-1}-1=s_k$ verschiedene Nullstellen.

Mit Rücksicht auf (16) und (17) ist

$$\begin{aligned}
s_1&=\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3+\cdots+2\lambda_k,\\
s_2&=\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\cdots+3\lambda_k-1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
s_{k-1}&=\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\cdots+k\lambda_k-k+2=n-k+3,\\
s_k&=n-k+2.
\end{aligned}$$

Zwischen diesen $n-k+2$ verschiedenen Nullstellen von $\Phi^{(k)}(t)$ liegen nach dem Rolleschen Satz $n-k+1$ verschiedene Nullstellen von $\Phi^{(k+1)}(t)$, usw. Ist $k-1\leqq r\leqq n+1$, so hat $\Phi^{(r)}(t)$ mindestens $n-r+2$ verschiedene Null-

stellen. Für $r = k-1$ liegen diese Nullstellen nicht außerhalb des Intervalles $\mathrm{Min}(x, x_0, \ldots, x_s) \leq t \leq \mathrm{Max}(x, x_0, \ldots, x_s)$; für $r \geq k$ liegen sie im Innern dieses Intervalles.

Da die r-te Ableitung

$$(18)\quad \frac{\partial^r}{\partial t^r}(t-x_0)^{\alpha_0}(t-x_1)^{\alpha_1}\ldots(t-x_s)^{\alpha_s} = (n+1)\ldots(n+1-r+1)\,t^{n+1-r}+\cdots$$

ein Polynom vom Grade $n+1-r$ ist, das nicht identisch verschwindet, hat sie höchstens $n+1-r$ verschiedene Nullstellen. Also hat $\Phi^{(r)}(t)$ mindestens eine Nullstelle $\xi = \xi_r$, an der die Ableitung (18) nicht verschwindet. Aus der r-mal differentiierten Formel (14) folgt nun, wenn wir $t = \xi$ setzen und nach $f(x) - P_n(x)$ auflösen:

Zu jeder natürlichen Zahl r mit $k-1 \leq r \leq n+1$ gibt es eine Zahl $\xi = \xi_r$, für die die Ableitung (18) nicht verschwindet und

$$(19)\quad f(x) - P_n(x) = \left[\frac{f^{(r)}(t) - P_n^{(r)}(t)}{\frac{\partial^r}{\partial t^r}(t-x_0)^{\alpha_0}\ldots(t-x_s)^{\alpha_s}}\right]_{t=\xi}(x-x_0)^{\alpha_0}\ldots(x-x_s)^{\alpha_s},$$

$$(20)\quad \mathrm{Min}(x, x_0, \ldots, x_s) \leq \xi \leq \mathrm{Max}(x, x_0, \ldots, x_s)$$

ist; für $k \leq r \leq n+1$ gilt die letzte Ungleichung sogar ohne die Gleichheitszeichen.

Speziell für $r = n+1$ wird

$$P_n^{(r)}(t) \equiv 0, \qquad \frac{\partial^r}{\partial t^r}(t-x_0)^{\alpha_0}\ldots(t-x_s)^{\alpha_s} = (n+1)!,$$

also

$$(21)\quad f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{\alpha_0}\ldots(x-x_s)^{\alpha_s}.$$

Da nach (1)

$$\alpha_\sigma \leq n+1-s \quad \text{für} \quad \sigma = 0, 1, \ldots, s, \quad \text{also} \quad k \leq n+1-s,$$

ist in diesem Fall $k-1 \leq n-s \leq n < n+1 = r$; $\xi = \xi_{n+1}$ genügt also der Ungleichung (20) mit Ausschluß der Gleichheitszeichen.

Wenn x mit einer der Interpolationsstellen zusammenfällt, gilt (19) auch noch, wofern man unter ξ nur irgendeine Stelle des Intervalles (20) versteht, die nicht Nullstelle der Ableitung (18) ist.

Im Spezialfall $s = n$, $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$ ist (21) die Cauchysche Formel für den Fehler der Lagrangeschen Interpolationsformel[9], [13], [13a].

[13] Herr E. Weinel [Bemerkungen über das Restglied der Lagrangeschen Interpolationsformel und der Formeln zur numerischen Differentiation. Z. angew. Math. Mech. **29**, 32—33 (1949)] hat den Lagrangeschen Spezialfall von (21) hergeleitet auf dem Wege über eine etwas allgemeinere Fehlergliedformel, die dem Schlömilchschen Restglied in der Taylorschen Formel entspricht.

[13a] Die Formel (21) findet sich auch bei W. Maak, Differential- und Integralrechnung, S. 77. Wolfenbüttel u. Hannover: Wolfenbütteler Verlagsanstalt G.m.b.H. 1949. Hierauf bin ich nach Abschluß dieser Arbeit in einem Gespräch mit Herrn Kollegen Maak aufmerksam geworden.

§ 3. Herleitung einer weiteren Fehlergliedformel.

1. Wir setzen für $\varrho \geqq 1$ und für $t \neq x$

$$k_\varrho(t, x) = \frac{\operatorname{sign}(x-t)}{2(\varrho-1)!}(t-x)^{\varrho-1}. \tag{22}$$

Diese Funktionen sind für $\varrho \geqq 2$ durchweg stetig, wenn wir für $\varrho \geqq 2$

$$k_\varrho(x, x) = 0 \tag{23}$$

setzen. Die Funktion $k_1(t, x)$ ist für $t \neq x$ stetig und hat an der Stelle $t = x$ einen Sprung von der Länge 1. Es ist

$$\begin{cases} \dfrac{\partial k_2(t, x)}{\partial t} = k_1(t, x) & \text{für} \quad t \gtrless x, \\ \dfrac{\partial k_{\varrho+1}(t, x)}{\partial t} = k_\varrho(t, x) & \text{für} \quad t \gtrless x \quad \text{und} \quad \varrho \geqq 2. \end{cases} \tag{24}$$

2. Ist $f'(t)$ über das Intervall $a \leqq t \leqq b$ absolut R-integrierbar und zunächst $a < x < b$, so ist

$$\int_a^b f'(t)\, k_1(t, x)\, dt = \tfrac{1}{2}\int_a^x f'(t)\, dt - \tfrac{1}{2}\int_x^b f'(t)\, dt = f(x) - \tfrac{1}{2}[f(a) + f(b)]$$

oder

$$f(x) = f(a)\, k_1(a, x) - f(b)\, k_1(b, x) + \int_a^b f'(t)\, k_1(t, x)\, dt. \tag{25}$$

Dies gilt, wie man leicht nachprüft, nachträglich auch für $x = a$ und für $x = b$, sofern man

$$k_1(a, a) = \lim_{x \to a+0} k_1(a, x), \qquad k_1(b, b) = \lim_{x \to b-0} k_1(b, x) \tag{26}$$

setzt.

Ist $f''(t)$ über das Intervall $a \leqq t \leqq b$ absolut R-integrierbar, so ist

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(t)\, k_1(t, x)\, dt &= \int_a^x f'(t)\, \frac{\partial k_2(t, x)}{\partial t}\, dt + \int_x^b f'(t)\, \frac{\partial k_2(t, x)}{\partial t}\, dt \\ &= -[f'(a)\, k_2(a, x) - f'(b)\, k_2(b, x)] - \int_a^b f''(t)\, k_2(t, x)\, dt. \end{aligned} \tag{27}$$

Ist $f^{(r)}(t)$ für ein $r \geqq 3$ über das Intervall $a \leqq t \leqq b$ absolut R-integrierbar, so ist für $\varrho = 2, 3, \ldots, r-1$

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{(\varrho)}(t)\, k_\varrho(t, x)\, dt &= \int_a^b f^{(\varrho)}(t)\, \frac{\partial k_{\varrho+1}(t, x)}{\partial t}\, dt \\ &= -[f^{(\varrho)}(a)\, k_{\varrho+1}(a, x) - f^{(\varrho)}(b)\, k_{\varrho+1}(b, x)] - \int_a^b f^{(\varrho+1)}(t)\, k_{\varrho+1}(t, x)\, dt. \end{aligned} \tag{28}$$

Nach (27) gilt (28) auch für $\varrho = 1$.

Aus (25) und (28) folgt, daß im Intervall $a \leqq x \leqq b$

$$f(x) = g_{r-1}(x) - (-1)^r \int_a^b f^{(r)}(t)\, k_r(t, x)\, dt, \tag{29}$$

wobei nach (22)

$$(30)\qquad \begin{cases} g_{r-1}(x) = \sum_{\varrho=0}^{r-1} (-1)^{\varrho} \left[f^{(\varrho)}(a)\, k_{\varrho+1}(a, x) - f^{(\varrho)}(b)\, k_{\varrho+1}(b, x) \right] \\ \qquad = \sum_{\varrho=0}^{r-1} \frac{(-1)^{\varrho}}{2\varrho!} \left[f^{(\varrho)}(a)\, (a-x)^{\varrho} + f^{(\varrho)}(b)\, (b-x)^{\varrho} \right] \end{cases}$$

ein Polynom höchstens $(r-1)$-ten Grades ist.

3. Nach (22) ist für $\alpha = 1, 2, \ldots, r-2$

$$(31)\qquad \frac{\partial^{\alpha} k_r(t, x)}{\partial x^{\alpha}} = (-1)^{\alpha} \frac{\operatorname{sign}(x-t)}{2(r-1-\alpha)!} (t-x)^{r-1-\alpha} = (-1)^{\alpha} k_{r-\alpha}(t, x).$$

Diese Ableitungen sind für alle t und x stetig.

Nach (29) wird damit[14]) für $\alpha = 1, 2, \ldots, r-2$

$$(32)\qquad f^{(\alpha)}(x) = g_{r-1}^{(\alpha)}(x) - (-1)^{r+\alpha} \int_a^b f^{(r)}(t)\, k_{r-\alpha}(t, x)\, dt.$$

---

[14]) Daß man die Differentiationen des Integrales unter dem Integralzeichen durchführen darf, obgleich der Integrand und seine Ableitungen nicht stetig zu sein brauchen, ergibt sich durch α-malige Anwendung des folgenden Hilfssatzes:

Ist $\lambda(t)$ über das Intervall $a \leq t \leq b$ absolut R-integrierbar, $\mu(t, x)$ und seine Ableitung $\mu_x(t, x)$ im Quadrat $a \leq t \leq b$, $a \leq x \leq b$ stetig, so ist

$$F(x) = \int_a^b \lambda(t)\, \mu(t, x)\, dt$$

im Intervall $a \leq x \leq b$ differentiierbar und

$$F'(x) = \int_a^b \lambda(t)\, \mu_x(t, x)\, dt.$$

Beweis: Ist auch $a \leq x + h \leq b$, so ist mit geeignet zwischen 0 und 1 gewähltem $\vartheta = \vartheta(t, x, h)$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_a^b \lambda(t) \left[\mu(t, x+h) - \mu(t, x) \right] dt$$

$$= \int_a^b \lambda(t)\, \mu_x(t, x)\, dt + \int_a^b \lambda(t) \left[\mu_x(t, x + \vartheta h) - \mu_x(t, x) \right] dt;$$

ist $\omega(\delta)$ das Stetigkeitsmaß von $\mu_x(t, x)$ im Quadrat, also für je zwei Stellen (t_1, x_1) und (t_2, x_2) desselben, deren Abstand höchstens gleich δ ist,

$$|\mu_x(t_1, x_1) - \mu_x(t_2, x_2)| \leq \omega(\delta),$$

so ist also

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_a^b \lambda(t)\, \mu_x(t, x)\, dt \right| \leq \omega(|h|) \int_a^b |\lambda(t)|\, dt.$$

Hieraus folgt die Behauptung, da bei unseren Voraussetzungen $\omega(|h|) \to 0$ für $h \to 0$.

Für $\alpha = r-2$ besagt dies, daß

$$f^{(r-2)}(x) = g_{r-1}^{(r-2)}(x) - \int_a^b f^{(r)}(t)\,\frac{\operatorname{sign}(x-t)}{2}\,(t-x)\,dt$$

$$= g_{r-1}^{(r-2)}(x) - \frac{1}{2}\int_a^x f^{(r)}(t)\,(t-x)\,dt + \frac{1}{2}\int_x^b f^{(r)}(t)\,(t-x)\,dt.$$

Hier können wir nochmals nach x differentiieren[15]) und finden

$$f^{(r-1)}(x) = g_{r-1}^{(r-1)}(x) + \tfrac{1}{2}\int_a^x f^{(r)}(t)\,dt - \tfrac{1}{2}\int_x^b f^{(r)}(t)\,dt = g_{r-1}^{(r-1)}(x) + \int_a^b f^{(r)}(t)\,k_1(t,x)\,dt;$$

die Formel (32) gilt also auch für $\alpha = r-1$.

4. Um die in das Interpolationspolynom

$$P_n(x) = \sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1} f^{(\alpha)}(x_\sigma)\,L_{\sigma\alpha}(x)$$

eingehenden Ableitungswerte gemäß (32) ausdrücken zu können, setzen wir nunmehr voraus, daß $k-1 \leqq r-1$, d.h. $r \geqq k$. Dann folgt aus (29) und (32) die angekündigte Restgliedformel

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \gamma_r(x) + \int_a^b f^{(r)}(t)\,K_r(t,x)\,dt, \tag{33}$$

wo

$$\gamma_r(x) = g_{r-1}(x) - \sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=1}^{\alpha_\sigma-1} g_{r-1}^{(\alpha)}(x_\sigma)\,L_{\sigma\alpha}(x) \tag{34}$$

[15]) Man wende auf die beiden letzten Integrale folgenden Hilfssatz an: Ist $\lambda(t)$ über das Intervall $u \leqq t \leqq v$ absolut R-integrierbar, so ist

$$G(x) = \int_u^x \lambda(t)\,(t-x)\,dt$$

für $u \leqq x \leqq v$ differentiierbar und

$$G'(x) = -\int_u^x \lambda(t)\,dt.$$

Beweis: Es ist

$$\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \lambda(t)\,(t-x)\,dt - \int_u^{x+h} \lambda(t)\,dt,$$

$$\frac{G(x+h)-G(x)}{h} + \int_u^x \lambda(t)\,dt = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \lambda(t)\,(t-x)\,dt - \int_x^{x+h} \lambda(t)\,dt,$$

$$\left|\frac{G(x+h)-G(x)}{h} + \int_u^x \lambda(t)\,dt\right| \leqq \left|\int_x^{x+h} |\lambda(t)|\,dt\right| + \left|\int_x^{x+h} |\lambda(t)|\,dt\right|;$$

für $h \to 0$ folgt hieraus die Behauptung.

und mit Rücksicht auf (22) für den Kern $K_r(t, x)$ die folgenden Darstellungen gelten:

$$(35)\quad \begin{cases} K_r(t,x) = (-1)^{r+1}\left[k_r(t,x) - \sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1} \frac{\partial^\alpha k_r(t,x)}{\partial x^\alpha}\Big|_{x=x_\sigma} L_{\sigma\alpha}(x)\right] \\ = (-1)^{r+1}\left[k_r(t,x) - \sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1} (-1)^\alpha k_{r-\alpha}(t,x_\sigma)\, L_{\sigma\alpha}(x)\right] \\ = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sign}(x-t)}{(r-1)!}(x-t)^{r-1} - \sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1} \frac{\operatorname{sign}(x_\sigma-t)}{(r-1-\alpha)!}(x_\sigma-t)^{r-1-\alpha} L_{\sigma\alpha}(x)\right]. \end{cases}$$

Der Grad des Polynomes $\gamma_r(x)$ ist nicht größer als die größere der Zahlen $r-1$ und n. $\gamma_r(x)$ gibt an, wie gut sich die vorliegende, d.h. durch die Interpolationsstellen $x_0, \ldots, x_s$ und die ihnen zugeschriebenen Ordnungen $\alpha_0, \ldots, \alpha_s$ bestimmte Interpolationsaufgabe für die spezielle Funktion $g_{r-1}(x)$ lösen läßt. Es ist daher $\gamma_r(x) \equiv 0$ für $r \leqq n+1$.

Entsprechend gibt, wie aus der ersten der Darstellungen (35) zu entnehmen ist, der Kern $K_r(t, x)$ an, wie gut sich die vorliegende Interpolationsaufgabe für die spezielle, vom Parameter t abhängende Funktion

$$(-1)^{r+1} k_r(t,x) = \frac{\operatorname{sign}(x-t)}{2(r-1)!}(x-t)^{r-1}$$

lösen läßt.

Für den Spezialfall $s=n$, $\alpha_0 = \cdots = \alpha_n = 1$ und $r = n+1$ ist (33) mit der dritten der Kerndarstellungen (35) in einer Formel von G. Kowalewski[6]) enthalten.

§ 4. Umformungen der Restgliedformel (33) und des Kernes.

1. Setzen wir insbesondere $f(x) = (x-t)^\varrho$ für $\varrho = 0, 1, \ldots, n$, so ist $R_n(x) = 0$, und (33) liefert die Relationen

$$(36)\quad \begin{cases} (x-t)^\varrho = \sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1} \frac{\partial^\alpha (x-t)^\varrho}{\partial x^\alpha}\Big|_{x=x_\sigma} L_{\sigma\alpha}(x) \\ \qquad = \sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1} \varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-\alpha+1)(x_\sigma-t)^{\varrho-\alpha} \cdot L_{\sigma\alpha}(x). \end{cases}$$

Aus (36), angewandt mit $\varrho = r-1$, und (35) folgt, daß

$$(37)\quad K_r(t,x) = \frac{1}{2}\sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1} [\operatorname{sign}(x-t) - \operatorname{sign}(x_\sigma-t)] \frac{(x_\sigma-t)^{r-1-\alpha}}{(r-1-\alpha)!} L_{\sigma\alpha}(x).$$

Außerhalb des Intervalles

$$X = \operatorname{Min}(x, x_0, \ldots, x_n) \leqq t \leqq \operatorname{Max}(x, x_0, \ldots, x_n) = X'$$

ist also $K_r(t, x) = 0$. Man kann daher in (33) die Integrationsgrenzen a und b durch X und X' ersetzen.

Ferner ist nach (37)

$$K_r(t,x)=\frac{1}{2}\sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1}[\pm 1-\operatorname{sign}(x_\sigma-t)]\,\frac{(x_\sigma-t)^{r-1-\alpha}}{(r-1-\alpha)!}\,L_{\sigma\alpha}(x)\quad\text{für}\quad x\gtrless t;$$

also

$$K_r(t,x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{x_\sigma<t}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1}\frac{(x_\sigma-t)^{r-1-\alpha}}{(r-1-\alpha)!}\,L_{\sigma\alpha}(x)\quad\text{für}\quad x>t\\ \displaystyle-\sum_{x_\sigma>t}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1}\frac{(x_\sigma-t)^{r-1-\alpha}}{(r-1-\alpha)!}\,L_{\sigma\alpha}(x)\quad\text{für}\quad x<t;\end{cases}$$

dies ist die Darstellung des Kernes, die Herr WEGNER[1]) im Lagrangeschen Fall auf dem Wege über die Greensche Funktion gewonnen hat.

Schließlich ist nach (33) und (37) für $k\leqq r\leqq n+1$

$$R_n(x)=\frac{1}{2}\sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1}L_{\sigma\alpha}(x)\int_a^b f^{(r)}(t)\,[\operatorname{sign}(x-t)-\operatorname{sign}(x_\sigma-t)]\,\frac{(x_\sigma-t)^{r-1-\alpha}}{(r-1-\alpha)!}\,dt.$$

Wenn aber die Ungleichung $a\leqq x\leqq x_\sigma\leqq b$ gilt, so ist

$$\operatorname{sign}(x-t)-\operatorname{sign}(x_\sigma-t)=\begin{cases}0 & \text{für}\quad a\leqq t<x\quad\text{und für}\quad x_\sigma<t\leqq b\\ -2 & \text{für}\quad x<t<x_\sigma,\end{cases}$$

und wenn die Ungleichung $a\leqq x_\sigma\leqq x\leqq b$ gilt, ist

$$\operatorname{sign}(x-t)-\operatorname{sign}(x_\sigma-t)=\begin{cases}0 & \text{für}\quad a\leqq t<x_\sigma\quad\text{und für}\quad x<t\leqq b\\ 2 & \text{für}\quad x_\sigma<t<x.\end{cases}$$

Damit folgt, daß

$$R_n(x)=\sum_{\sigma}^{s}{}'\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1}{}^{1}L_{\sigma\alpha}(x)\int_{x_\sigma}^{x}f^{(r)}(t)\,\frac{(x_\sigma-t)^{r-1-\alpha}}{(r-1-\alpha)!}\,dt\qquad(k\leqq r\leqq n+1).$$

Für den Lagrangeschen Fall und $r=n+1$ hat diese Formel G. KOWALEWSKI angegeben und seinen Untersuchungen über Interpolation zugrunde gelegt[16]).

2. Aus der Lehre von den Bernoullischen Polynomen[17]) benötigen wir bei der folgenden Umformung des Kernes

a) ihre rekurrente Erzeugung

$$B_0(x)=1,\qquad B_{\varrho+1}(x)=B_{\varrho+1}+(\varrho+1)\int_0^x B_\varrho(t)\,dt\qquad(\varrho=0,1,\ldots),$$

wobei

$$B_0=1,\quad B_1=-\tfrac{1}{2},\quad B_2=\tfrac{1}{6},\quad B_3=0,\quad B_4=-\tfrac{1}{30},\ldots$$

---

[16]) KOWALEWSKI, G.: Interpolation und genäherte Quadratur, S. 24. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1932. — KOWALEWSKI, G.: Zur Analysis des Endlichen und Unendlichen, S. 107f. München: R. Oldenbourg 1950.

[17]) Vgl. dazu etwa N. E. NÖRLUND[4]), S. 17ff.

die Bernoullischen Zahlen sind, und insbesondere, daß hiernach

$$B_1(x) = B_1 + x, \quad B_2(x) = B_2 + 2B_1 x + x^2 = B_2 - x + x^2;$$

b) die Beziehung

$$B_\varrho(0) = B_\varrho(1) = B_\varrho \quad (\varrho = 0, 2, 3, \ldots);$$

c) die Tatsache, daß alle Bernoullischen Zahlen mit ungerader Nummer oberhalb 1 gleich 0 sind.

Aus a) und b) folgt, daß

$$\int_0^1 B_\varrho(t)\,dt = \frac{1}{\varrho+1}\,[B_{\varrho+1}(1) - B_{\varrho+1}(0)] = 0 \quad \text{für} \quad \varrho \geqq 1.$$

Wir benutzen im folgenden die Funktionen

$$\mathfrak{B}_\varrho(x) = B_\varrho(x - [x]) \qquad (\varrho = 0, 1, \ldots). \tag{38}$$

Dieselben haben alle die Periode 1. Es ist daher $\mathfrak{B}_0(x) \equiv 1$ und für $\varrho \geqq 1$ nach der letzten Feststellung und nach a)

$$\left\{\begin{aligned} \int_0^x \mathfrak{B}_\varrho(t)\,dt &= \int_0^{[x]} \mathfrak{B}_\varrho(t)\,dt + \int_{[x]}^x \mathfrak{B}_\varrho(t)\,dt \\ &= [x]\cdot\int_0^1 B_\varrho(t)\,dt + \int_0^{x-[x]} \mathfrak{B}_\varrho(\tau + [x])\,d\tau = \int_0^{x-[x]} B_\varrho(\tau)\,d\tau \\ &= \frac{1}{\varrho+1}\,[B_{\varrho+1}(x-[x]) - B_{\varrho+1}] = \frac{1}{\varrho+1}\,[\mathfrak{B}_{\varrho+1}(x) - B_{\varrho+1}]. \end{aligned}\right. \tag{39}$$

$\mathfrak{B}_0(x) \equiv 1$ ist eine gerade Funktion, $\mathfrak{B}_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ eine ungerade Funktion. Nehmen wir an, es stünde schon fest, daß $\mathfrak{B}_{2\varrho-1}(x)$ ungerade ist; dann ist nach (39)

$$\mathfrak{B}_{2\varrho}(x) - \mathfrak{B}_{2\varrho}(-x) = 2\varrho\left[\int_0^x \mathfrak{B}_{2\varrho-1}(t)\,dt - \int_0^{-x} \mathfrak{B}_{2\varrho-1}(t)\,dt\right] = 0,$$

also $\mathfrak{B}_{2\varrho}(x)$ eine gerade Funktion; daher ist mit Rücksicht auf c) für $\varrho \geqq 1$

$$\mathfrak{B}_{2\varrho+1}(x) + \mathfrak{B}_{2\varrho+1}(-x) = (2\varrho+1)\left[\int_0^x \mathfrak{B}_{2\varrho}(t)\,dt + \int_0^{-x} \mathfrak{B}_{2\varrho}(t)\,dt\right] = 0,$$

d.h. $\mathfrak{B}_{2\varrho+1}(x)$ eine ungerade Funktion.

Also sind die Funktionen $\mathfrak{B}_\varrho(x)$ mit gerader Nummer gerade Funktionen, die mit ungerader Nummer ungerade Funktionen.

3. Wir setzen zur Abkürzung

$$\frac{x-t}{b-a} = u = u(x-t). \tag{40}$$

Es ist

$$\mathfrak{B}_1(u) = -\tfrac{1}{2} + u - [u] = \mp\tfrac{1}{2} + u \quad \text{für} \quad \begin{cases} a \leqq t < x \leqq b \\ a \leqq x < t \leqq b, \end{cases}$$

also nach (22) für $a \leqq t \leqq b$, $a \leqq x \leqq b$, $t \neq x$

$$k_1(t, x) = u - \mathfrak{B}_1(u) = -\,[\mathfrak{B}_1(u) - B_1(u) - \tfrac{1}{2}].$$

Wir behaupten, daß allgemein für $r \geqq 1$

$$k_r(t,x) = (-1)^r \frac{(b-a)^{r-1}}{r!}\left[\mathfrak{B}_r(u) - B_r(u) - \frac{r}{2}u^{r-1}\right]. \tag{41}$$

Für $r=1$ trifft dies zu. Gilt es aber für irgendein $r \geqq 1$, so ist nach (23) und (24), sowie (39) und a)

$$\begin{aligned} k_{r+1}(t,x) &= \int_x^t k_r(\tau,x)\,d\tau \\ &= (-1)^{r+1}\frac{(b-a)^r}{r!}\left[\int_0^u \mathfrak{B}_r(v)\,dv - \int_0^u B_r(v)\,dv - \frac{r}{2}\int_0^u v^{r-1}\,dv\right] \\ &= (-1)^{r+1}\frac{(b-a)^r}{r!}\left[\frac{1}{r+1}\mathfrak{B}_{r+1}(u) - \frac{1}{r+1}B_{r+1} - \frac{1}{r+1}B_{r+1}(u) + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{r+1}B_{r+1} - \frac{1}{2}u^r\right] \\ &= (-1)^{r+1}\frac{(b-a)^r}{(r+1)!}\left[\mathfrak{B}_{r+1}(u) - B_{r+1}(u) - \frac{r+1}{2}u^r\right]; \end{aligned}$$

die Formel (41) gilt also auch für $r+1$ statt r und damit allgemein.

4. Trägt man (41) und (40) in die zweite der Kerndarstellungen (35) ein, so ergibt sich

$$\left\{\begin{aligned} K_r(t,x) &= Q_r(t,x) - \frac{(b-a)^{r-1}}{r!}\mathfrak{B}_r\left(\frac{x-t}{b-a}\right) + \\ &\quad + \sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1}\frac{(b-a)^{r-1-\alpha}}{(r-\alpha)!}\mathfrak{B}_{r-\alpha}\left(\frac{x_\sigma-t}{b-a}\right)L_{\sigma\alpha}(x), \end{aligned}\right. \tag{42}$$

wobei

$$\left\{\begin{aligned} Q_r(t,x) &= \frac{(b-a)^{r-1}}{r!}\left[B_r\left(\frac{x-t}{b-a}\right) + \frac{r}{2}\left(\frac{x-t}{b-a}\right)^{r-1}\right] - \\ &\quad - \sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1}\frac{(b-a)^{r-1-\alpha}}{(r-\alpha)!}\left[B_{r-\alpha}\left(\frac{x_\sigma-t}{b-a}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r-\alpha}{2}\left(\frac{x_\sigma-t}{b-a}\right)^{r-1-\alpha}\right]L_{\sigma\alpha}(x) \\ &= \frac{(b-a)^{r-1}}{r!}\left\{B_r\left(\frac{x-t}{b-a}\right) + \frac{r}{2}\left(\frac{x-t}{b-a}\right)^{r-1} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma-1}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\left[B_r\left(\frac{x-t}{b-a}\right) + \frac{r}{2}\left(\frac{x-t}{b-a}\right)^{r-1}\right]_{x=x_\sigma}L_{\sigma\alpha}(x)\right\}. \end{aligned}\right. \tag{43}$$

Nun ist nach a) $B_r(u)$ ein Polynom vom Grade r, worin u^r den Koeffizienten 1 hat. $Q_r(t,x)$ ist daher nach (43) ein Polynom in x, das den $n+1$ Bedingungen

$$\frac{\partial^\beta Q_r(t,x)}{\partial x^\beta}\Big|_{x=x_\tau} = 0 \qquad (\tau = 0,\ldots,s;\ \beta = 0,\ldots,\alpha_\tau - 1)$$

genügt und dessen Grad für $r \leqq n$ höchstens gleich n und für $r = n+1$ genau gleich $n+1$ ist. Es ist also

$$(44)\quad \begin{cases} Q_r(t, x) \equiv 0 \quad \text{für} \quad r \leqq n \\ Q_{n+1}(t, x) = \dfrac{1}{(n+1)!\,(b-a)}\, x^{n+1} + \cdots - \dfrac{(x-x_0)^{\alpha_0} \cdots (x-x_s)^{\alpha_s}}{(n+1)!\,(b-a)}. \end{cases}$$

Die Zusammenfassung von (42) und (44) ergibt eine Darstellung des Kernes, die im Lagrangeschen Fall und für $a = 0$ und $b = 1$, von einer etwas abweichenden Normierung der Bernoullischen Polynome und der Funktionen $\mathfrak{B}_\varrho(t)$ abgesehen, mit der ersten von Herrn Wegner[1]) aufgestellten Formel übereinstimmt.

§ 5. Eine allgemeine Quadraturformel.

Setzen wir zur Abkürzung

$$(45)\quad \int_a^b L_{\sigma\alpha}(x)\, dx = L_{\sigma\alpha} \qquad (\sigma = 0, 1, \ldots, s;\ \alpha = 0, 1, \ldots, \alpha_\sigma - 1),$$

so ergibt für $k \leqq r \leqq n+1$ Integration der Formel (33)

$$(46)\quad \int_a^b f(x)\, dx = \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} f^{(\alpha)}(x_\sigma)\, L_{\sigma\alpha} + R_n.$$

In dieser Quadraturformel ist das Restglied nach (35)

$$(47)\quad \begin{cases} R_n = \int_a^b R_n(x)\, dx = \int_a^b \int_a^b f^{(r)}(t)\, K_r(t, x)\, dt\, dx = (-1)^{r+1} \times \\ \times \left[\int_a^b \int_a^b f^{(r)}(t)\, k_r(t, x)\, dt\, dx - \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} (-1)^\alpha \int_a^b \int_a^b f^{(r)}(t)\, k_{r-\alpha}(t, x_\sigma)\, L_{\sigma\alpha}(x)\, dt\, dx \right]. \end{cases}$$

Unter den Summenzeichen können wir die Integrationsreihenfolge ohne weiteres vertauschen:

$$\int_a^b \int_a^b f^{(r)}(t)\, k_{r-\alpha}(t, x_\sigma)\, L_{\sigma\alpha}(x)\, dt\, dx = \int_a^b L_{\sigma\alpha}(x) \int_a^b f^{(r)}(t)\, k_{r-\alpha}(t, x_\sigma)\, dt\, dx$$

$$= \int_a^b f^{(r)}(t) \int_a^b k_{r-\alpha}(t, x_\sigma)\, L_{\sigma\alpha}(x)\, dx\, dt.$$

Die Vertauschung

$$(48)\quad \int_a^b \int_a^b f^{(r)}(t)\, k_r(t, x)\, dt\, dx = \int_a^b f^{(r)}(t) \int_a^b k_r(t, x)\, dx\, dt$$

bedarf aber bei den geringen Voraussetzungen, die wir machten, einer besonderen Begründung. Wir behandeln zunächst den Fall $r = 1$, wo $k_r(t, x)$ für $t = x$ unstetig ist.

Es ist einerseits

$$\int_a^b f'(t)\, k_1(t, x)\, dt = \tfrac{1}{2} \int_a^x f'(t)\, dt - \tfrac{1}{2} \int_x^b f'(t)\, dt = f(x) - \tfrac{1}{2}[f(a) + f(b)]$$

und damit

$$\int_a^b\int_a^b f'(t)\,k_1(t,x)\,dt\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \tfrac{1}{2}\,[f(a)+f(b)]\,(b-a),$$

andererseits

$$\int_a^b f'(t)\,k_1(t,x)\,dx = f'(t)\int_a^b k_1(t,x)\,dx = \frac{1}{2}f'(t)\left[-\int_a^t dx + \int_t^b dx\right]$$

$$= \frac{a+b}{2}f'(t) - t\,f'(t)$$

und damit

$$\int_a^b\int_a^b f'(t)\,k_1(t,x)\,dx\,dt = \frac{a+b}{2}\,[f(b)-f(a)] - \int_a^b t\,f'(t)\,dt$$

$$= \frac{a+b}{2}\,[f(b)-f(a)] - b\,f(b) + a\,f(a) + \int_a^b f(t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{2}\,[f(a)+f(b)];$$

für $r=1$ ist also (48) richtig.

Nun sei $r>1$. Dann ist $k_r(t,x)$ im Quadrat $a\leqq t\leqq b,\ a\leqq x\leqq b$ gleichmäßig stetig. Es sei $\omega(\delta)$ das Stetigkeitsmaß von $k_r(t,x)$ in diesem Quadrat. Es ist

$$\left|\int_a^b f^{(r)}(t)\,k_r(t,x+h)\,dt - \int_a^b f^{(r)}(t)\,k_r(t,x)\,dt\right| \leqq \omega(|h|)\int_a^b |f^{(r)}(t)|\,dt;$$

da hier die rechte Seite gegen 0 strebt, wenn $h\to 0$ geht, ist in

$$F(v) = \int_a^v\int_a^b f^{(r)}(t)\,k_r(t,x)\,dt\,dx$$

der Integrand des äußeren Integrales eine stetige Funktion von x im Intervall $a\leqq x\leqq b$, also

$$F'(v) = \int_a^b f^{(r)}(t)\,k_r(t,v)\,dt.$$

Wir betrachten andererseits die Funktion

$$G(v) = \int_a^b\int_a^v f^{(r)}(t)\,k_r(t,x)\,dx\,dt;$$

ihr Differenzenquotient ist

$$\frac{G(v+h)-G(v)}{h} = \int_a^b f^{(r)}(t)\,k_r(t,v+\vartheta h)\,dt \qquad (0<\vartheta<1);$$

also ist

$$\left|\frac{G(v+h)-G(v)}{h} - \int_a^b f^{(r)}(t)\,k_r(t,v)\,dt\right|$$

$$= \left|\int_a^b f^{(r)}(t)\,[k_r(t,v+\vartheta h)-k_r(t,v)]\,dt\right| \leqq \omega(|h|)\int_a^b |f^{(r)}(t)|\,dt;$$

hieraus folgt für $h \to 0$, daß

$$G'(v) = \int_a^b f^{(r)}(t)\, k_r(t, v)\, dt.$$

Es ist also $F(a) = G(a) = 0$ und $F'(v) = G'(v)$ für $a \leqq v \leqq b$. Daher ist $F(v) = G(v)$ im ganzen Intervall $a \leqq v \leqq b$. Für $v = b$ besagt dies insbesondere, daß die Formel (48) gilt.

Nach (47), (48) und (35) ist

$$\begin{aligned} R_n &= (-1)^{r+1} \int_a^b f^{(r)}(t) \int_a^b \left[k_r(t, x) - \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} (-1)^\alpha k_{r-\alpha}(t, x_\sigma)\, L_{\sigma\alpha}(x) \right] dx\, dt \\ &= \int_a^b f^{(r)}(t) \int_a^b K_r(t, x)\, dx\, dt \end{aligned}$$

oder

$$R_n = \int_a^b f^{(r)}(t)\, \Psi_r(t)\, dt. \tag{49}$$

Für die Funktion $\Psi_r(t)$ findet man nach (35), (31) und (22) leicht die Darstellungen

$$\left\{ \begin{aligned} \Psi_r(t) &= \int_a^b K_r(t, x)\, dx \\ &= (-1)^{r+1} \left[k_{r+1}(t, a) - k_{r+1}(t, b) - \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} (-1)^\alpha k_{r-\alpha}(t, x_\sigma)\, L_{\sigma\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(a-t)^r + (b-t)^r}{r!} - \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} L_{\sigma\alpha} \frac{\operatorname{sign}(x_\sigma - t)}{(r-1-\alpha)!} (x_\sigma - t)^{r-1-\alpha} \right], \end{aligned} \right. \tag{50}$$

bzw. nach (42) und (44)

$$\Psi_r(t) = C_r + \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_\sigma - 1} \frac{(b-a)^{r-1-\alpha}}{(r-\alpha)!} L_{\sigma\alpha}\, \mathfrak{B}_{r-\alpha}\left(\frac{x_\sigma - t}{b-a} \right), \tag{51}$$

wo

$$C_r = 0 \text{ .für } 1 \leqq r \leqq n, \qquad C_{n+1} = \int_a^b \frac{(x-x_0)^{\alpha_0} \dots (x-x_s)^{\alpha_s}}{(n+1)!\,(b-a)}\, dx. \tag{52}$$

Die Quadraturformel (46) mit dem Fehlerglied (49) wurde im Lagrangeschen Fall von W. WIRTINGER a. in [3]) a. O. angegeben; WIRTINGER drückte dabei die Funktion $\Psi_r(t)$ durch die Funktionen $\mathfrak{B}_r(t)$ aus. Mit der zweiten der Darstellungen (50) für $\Psi_r(t)$ hat sie auch Herr A. KNESCHKE[10]) unter der Voraussetzung, daß $f^{(r)}(t)$ stetig ist, gefunden.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 19. November 1954.)

Markus, L.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 310—319 (1955)

Continuous matrices and the stability of differential systems.

By
Lawrence Markus.

1. *Kinematic similarity of matrices.* To investigate the stability of differential equations we find the invariants and canonical forms, under the equivalence relation of kinematic similarity, of matrices whose entries vary with time. Let $\mathfrak{M}_n$ be the set of all $n \times n$ matrices whose entries are complex-valued functions of a real variable t (called time), continuous and bounded on a right half-line, say $0 \leqq t < \infty$.

Definition. *For A, $B \in \mathfrak{M}_n$ we say $A \sim B$ (read: A is kinematically similar to B) in case there exists a matrix P with P, P^{-1}, and*[1] *$\dot{P} \in \mathfrak{M}_n$ and $-P^{-1}[\dot{P} - AP] = B$ for all $0 \leqq t < \infty$. If A, B, and P are real-valued, then A is kinematically similar to B over the real field.*

It is easy to verify that kinematic similarity is an equivalence relation on $\mathfrak{M}_n$. Loewy [*11*] and Jacobson [*8*] have studied this relation algebraically without reference to the requirement of boundedness. Perron [*14*, p. 466] introduced the above definition in his stability theory and showed that every matrix in $\mathfrak{M}_n$ is kinematically equivalent to a triangular matrix. Perron [*13*, p. 751] refined Liapounoff's [*10*, p. 255] concept of the characteristic exponents of a matrix in $\mathfrak{M}_n$ and so extended the classical stability theory of differential systems [*9*, Ch. IV and *2*, Ch. II] beyond those special instances where the variational equations had constant or periodic coefficients. Cameron [*4*] sought conditions to insure that almost periodic linear differential systems have solutions of a certain form; however, his results are quite different from ours. Lately Diliberto [*5*] has improved upon the results of Perron and has shown that the characteristic exponents are invariants of kinematic similarity.

In this paper we clarify the relation between the characteristic exponents of Perron and the classical stability theories of differential systems by a systematic use of kinematic similarity. For the important class of matrices which are kinematically similar to constant matrices, thus including all periodic matrices [*7* or *9*, p. 68] but not all almost periodic matrices [*5*, p. 26], we compute a complete set of invariants and determine canonical forms which display these invariants.

More practically, for a new class of matrices, we develop explicit estimates for the characteristic exponents and thus we test the Liapounoff stability

[1] $\dot{P} = dP/dt$. Actually "$\dot{P}$ exists" is equivalent to "$\dot{P} \in \mathfrak{M}_n$" in this definition.

of solutions of certain non-linear differential systems. PERRON [*13*, p. 760] noted that the characteristic exponents do not vary continuously with the coefficient matrix of a linear differential system and thus their exact values are difficult to determine. In fact, unless A is constant or else its diagonal entries are dominant in a certain special sense [*13*, p. 762], there seems to be little known for estimating the characteristic exponents.

For an intuitive appreciation of the significance of kinematic similarity consider a homogeneous linear system of n ordinary differential equations $\dot{X} = AX$ where $A \in \mathfrak{M}_n$ and $X(t)$ is a solution (column) vector in E_c^n (complex Euclidean n-space), differentiable and satisfying the differential equation for each $0 \leq t < \infty$. Such systems arise as variational equations, based on a bounded solution, of a non-linear differential system in E^n, see theorem 4 below.

To study the geometric behavior of a solution curve $X(t)$, one effects a non-singular linear coordinate change $Y = P^{-1}X$ with $P \in \mathfrak{M}_n$. Then the transformed equation, that is, the equation which has the same solution curves in E_c^n, is $\dot{Y} = BY$ where $B = -P^{-1}[\dot{P} - AP]$. Thus $A \sim B$ if and only if they are coefficients of the same differential system which is referred to two coordinate systems in E_c^n.

If $Y = P_0^{-1}X$, where P_0 is a constant matrix, then $-P_0^{-1}[\dot{P}_0 - AP_0] = P_0^{-1}AP_0 = B$ and thus the algebraic relation of similarity, which we shall call static similarity, is a special case of kinematic similarity. However, as we shall later see, there are even constant matrices which are kinematically, though not statically, similar.

The geometric significance of allowing P to vary with time t is that the new coordinates Y can be moving relative to the original coordinates $X = PY$. If one does not require P and P^{-1} to be bounded, then every matrix $A \in \mathfrak{M}_n$ can be transformed into the zero matrix by merely taking P as a non-singular solution matrix of $\dot{P} = AP$. This is not surprising since it only states that, as referred to axes affixed to the solution vectors of $\dot{X} = AX$, the relative velocity is zero. However, we demand P and $P^{-1} \in \mathfrak{M}_n$ so that the coordinate transformations preserve the uniform structure of E_c^n, for all $0 \leq t < \infty$. In this case stability has an invariant meaning.

The most interesting case is when $A \in \mathfrak{M}_n$ is kinematically similar to a constant matrix C. Here the solutions of $\dot{X} = AX$ are just linear combinations, with bounded continuous coefficients, of the solutions of $\dot{Y} = CY$. Thus the real parts of the characteristic roots of C govern the asymptotic growth of the solutions $X(t)$, and thereby the stability of $\dot{X} = AX$, about the origin.

2. *Characteristic exponents and other invariants.* Following PERRON we define the (generalized) characteristic exponents.

Definition. *Let $\dot{X} = AX$ where $A \in \mathfrak{M}_n$. For each non-zero solution vector $X_\alpha(t)$ define a characteristic exponent of A by* $\lim\sup_{t \to \infty} t^{-1} \log |X_\alpha(t)| = \lambda_\alpha$.

Here we take the norm of a vector (or of a matrix) as the maximum of the absolute values of its components. PERRON [*13*, p. 750] showed that the real numbers λ_α are bounded, in fact, $|\lambda_\alpha| \leq n \sup_{0 \leq t < \infty} |A|$. Moreover, there are at most n distinct characteristic exponents of A.

Definition. *Let $\dot{X} = AX$ where $A \in \mathfrak{M}_n$. For each solution vector $X(t)$ with characteristic exponent λ define a type of A as $\nu(\lambda, X(t)) = \nu(\lambda) = \limsup_{t \to \infty} \log |X(t)\, e^{-\lambda t}| / \log t$.*

Solutions of different type are linearly independent and so there are only a finite number of types for each characteristic exponent of $A \in \mathfrak{M}_n$. Let $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k$ be the distinct characteristic exponents of A and let $\nu_{11} < \nu_{12} < \cdots$; $\nu_{21} < \nu_{22} < \cdots$; $\cdots$; $\nu_{k1} < \nu_{k2} < \cdots$ be corresponding types with ν_{ij} belonging to λ_i for $i = 1, 2, \ldots, k$.

The set of all solution vectors of $\dot{X} = AX$ with characteristic exponents $\lambda \leq \lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, forms a linear space called $E(\lambda_i)$. Moreover $E(\lambda_{i-1})$ is properly included in $E(\lambda_i)$ and we make the convention $E(\lambda_0) = 0$. Furthermore for any two solution vectors in the set difference $E(\lambda_i) - E(\lambda_{i-1})$, which differ only by a solution in $E(\lambda_{i-1})$, the type is the same. Thus one can define the type of a coset in the factor space $E(\lambda_i)/E(\lambda_{i-1})$, taking the identity coset to have zero type. The collection of cosets of $E(\lambda_i)/E(\lambda_{i-1})$ whose type $\nu \leq \nu_{ij}$ is a linear subspace of $E(\lambda_i)/E(\lambda_{i-1})$ called $T(\lambda_i, \nu_{ij})$. Again we agree that $T(\lambda_i, \nu_{i0}) = 0$.

Definition. *Let $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k$ be the distinct characteristic exponents of $A \in \mathfrak{M}_n$ with corresponding types $\nu_{11} < \nu_{12} < \cdots$; $\nu_{21} < \nu_{22} < \cdots$; $\cdots$; $\nu_{k1} < \nu_{k2} < \cdots$. The multiplicity of λ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, is $m(\lambda_i) = \dim E(\lambda_i)/E(\lambda_{i-1})$. The multiplicity of ν_{ij} is $m(\nu_{ij}) = \dim T(\lambda_i, \nu_{ij})/T(\lambda_i, \nu_{i,j-1})$.*

Theorem 1. *The characteristic exponents λ_i of $A \in \mathfrak{M}_n$, their types ν_{ij}, and the multiplicities $m(\lambda_i)$ and $m(\nu_{ij})$ are invariants of kinematic similarity.*

Proof. Let $-P^{-1}[\dot{P} - AP] = B$ define the kinematic similarity $A \sim B$ and consider the isomorphism $X(t) \to Y(t) = P^{-1}X(t)$ of the solution space of $\dot{X} = AX$ onto that of $\dot{Y} = BY$. Since P and P^{-1} are in $\mathfrak{M}_n$, corresponding solutions $X(t)$ and $Y(t)$ have the same characteristic exponents and the same types. Therefore, using the isomorphism, we show that the numbers $\lambda_i, \nu_{ij}, m(\lambda_i), m(\nu_{ij})$ are the same for A and B. Q. E. D.

Each constant $n \times n$ matrix A_0 is statically, and thereby kinematically, similar to a Jordan matrix $A_J = \operatorname{diag}\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$. Here each square block $A_i = \operatorname{diag}\{A_{i1}, \ldots, A_{ip_i}\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ and each square (elementary divisor) block $A_{ir} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$, $r = 1, 2, \ldots, p_i$, where the complex numbers λ_i are the characteristic roots of A_0. We arrange an order of the blocks A_{ir} down the principal diagonal of A_J (say, first by increasing $|\lambda_i|$, second by increasing $\operatorname{Arg} \lambda_i$, and third by $\dim A_{ir}$) and then the Jordan matrix A_J which is statically similar to A_0 is unique.

We shall introduce real Jordan matrices as canonical forms for a subclass of $\mathfrak{M}_n$, including all constant and periodic matrices.

Lemma. *Let A_J and B_J be real, constant, Jordan matrices. If $A_J \sim B_J$, then $A_J = B_J$.*

Proof. We need only verify that the invariants λ_i, ν_{ij}, $m(\lambda_i)$, and $m(\nu_{ij})$ characterize a real Jordan matrix A_J. But the characteristic roots of A_J are exactly its characteristic exponents λ_i. Also, using the above notation for A_J, $\dim A_i = m(\lambda_i)$. Now $A_i = \operatorname{diag}\{A_{i1}, \ldots, A_{ip_i}\}$ and the dimensions of the blocks A_{ir}, $r = 1, 2, \ldots, p_i$, are determined by the types ν_{ij}. In fact, the number of blocks of A_{ir} of dimension $\geq \nu_{ij}+1$ is exactly $m(\nu_{ij})$. Thus the total structure of A_J is determined by the λ_i, ν_{ij}, $m(\lambda_i)$, $m(\nu_{ij})$ as is required. Q. E. D.

Theorem 2. *For the subclass of matrices in $\mathfrak{M}_n$ which are kinematically similar to constant matrices, the invariants consisting of characteristic exponents λ_i, types ν_{ij}, and their multiplicities $m(\lambda_i)$ and $m(\nu_{ij})$ form a complete set of invariants. Furthermore if $A \sim C$, for $A \in \mathfrak{M}_n$ and C a constant matrix, then there exists a unique real constant Jordan matrix $A_J \sim A$ which displays the invariants of A.*

Proof. The above lemma proves the uniqueness of A_J. From the existence of A_J it also follows that the invariants λ_i, ν_{ij}, $m(\lambda_i)$, $m(\nu_{ij})$ form a complete set. To show the existence of A_J we can assume that C is a complex Jordan matrix and show that C is kinematically similar to a real Jordan matrix. In fact, it is sufficient to show that, for each elementary divisor block,

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \xi & 1 & & 0 \\ & \xi & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \xi \end{pmatrix} = A_{ij}$$

where $\lambda = \xi + i\eta$. Then define $\Pi_{ij} = e^{i\eta t}\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. Direct calculation shows that $-\Pi_{ij}^{-1}[\dot{\Pi}_{ij} - C_{ij}\Pi_{ij}] = A_{ij}$ which yields the required reduction. Q. E. D.

Thus the unique canonical form A_J for A is obtained by taking a complex Jordan matrix $C \sim A$ and then eradicating the imaginary parts of the characteristic roots of C. Thus if A is, for example, a periodic matrix, its characteristic exponents can be realized as the characteristic roots of the unique, real, Jordan matrix $A_J \sim A$.

Corollary. *If $A \sim C$ over the real field, where $A \in \mathfrak{M}_n$ and C is a constant matrix, then $A \sim A_J$ over the real field.*

Proof. We can assume that C is in a classical (static similarity) normal form for real matrices. In fact, we need only study elementary divisor blocks

$$C_{ij}^R = \begin{pmatrix} A_i & I_2 & & 0 \\ & A_i & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & A_i \end{pmatrix}, \quad \text{where} \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c_i & -b_i \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

and the corresponding elementary divisor is a power of $(x^2+b_ix+c_i)$ with $\Delta_i=1/2(4c_i-b_i^2)^{\frac{1}{2}}>0$.

Define $\Pi_i'=\begin{pmatrix} \cos\Delta_i t & \sin\Delta_i t \\ -\frac{b_i}{2}\cos\Delta_i t-\Delta_i\sin\Delta_i t & -\frac{b_i}{2}\sin\Delta_i t+\Delta_i\cos\Delta_i t\end{pmatrix}$ and let $\Pi_i=\operatorname{diag}\{\Pi_i', \ldots, \Pi_i'\}$ so that Π_i has the same dimension as C_{ij}^R. Then one calculates

$$-\Pi_i^{-1}[\dot{\Pi}_i-C_{ij}^R\Pi_i]=\begin{pmatrix} \Xi_i & I_2 & & 0 \\ & \Xi_i & I_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & I_2 \\ 0 & & & \Xi_i\end{pmatrix} \quad \text{where} \quad \Xi_i=-\frac{b_i}{2}I_2.$$

But by the classical theory of real elementary divisors, $-\Pi_i^{-1}[\dot{\Pi}_i-C_{ij}^R\Pi_i]$ is statically similar, over the real field, to $\operatorname{diag}\{A_{ij}, A_{ij}\}$ where

$$A_{ij}=\begin{pmatrix} -\frac{b_i}{2} & 1 & & 0 \\ & -\frac{b_i}{2} & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ 0 & & & -\frac{b_i}{2}\end{pmatrix}.$$ Therefore $\mathcal{A}\sim\mathcal{A}_J$ over the real field. Q. E. D.

Various authors [2, p. 25; 5, p. 2; 14, p. 466] have investigated canonical forms other than the real, constant Jordan form. The next theorem shows that for matrices $\mathcal{A}\in\mathfrak{M}_n$ which have a real, constant, Jordan form $\mathcal{A}_J$, $\mathcal{A}$ is diagonalizable in $\mathfrak{M}_n$ only in case $\mathcal{A}_J$ is already diagonal.

Theorem 3. *Let $\mathcal{A}\sim\mathcal{A}_J$ where $\mathcal{A}\in\mathfrak{M}_n$ and $\mathcal{A}_J$ is its real, constant Jordan form. Then there exists a diagonal matrix $D\in\mathfrak{M}_n$ such that $\mathcal{A}\sim D$ if and only if $\mathcal{A}_J$ is diagonal.*

Proof. Of course we need only show that $\mathcal{A}\sim D$ implies that $\mathcal{A}_J$ is diagonal. We suppose the contrary and consider the special case where $\mathcal{A}_J=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda\end{pmatrix}$ consists of only one elementary divisor block. Using $P=(p_{ij})$ and $D=\operatorname{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ and the equation $\dot{P}=\mathcal{A}_JP-PD$ we have:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_{11}&=\lambda p_{11}+p_{21}-p_{11}d_1\\
\dot{p}_{12}&=\lambda p_{12}+p_{22}-p_{12}d_2\\
&\vdots\\
\dot{p}_{1n}&=\lambda p_{1n}+p_{2n}-p_{1n}d_n;\\
\dot{p}_{21}&=\lambda p_{21}+p_{31}-p_{21}d_1\\
&\vdots\\
\dot{p}_{2n}&=\lambda p_{2n}+p_{3n}-p_{2n}d_n;\\
&\vdots\\
\dot{p}_{n1}&=\lambda p_{n1}-p_{n1}d_1\\
\dot{p}_{n2}&=\lambda p_{n2}-p_{n2}d_2\\
&\vdots\\
\dot{p}_{nn}&=\lambda p_{nn}-p_{nn}d_n.
\end{aligned}$$

If $d_1 = \lambda$, then $\dot{p}_{n1} = 0$ and $p_{n1} = c_{n1}$ is a constant. But then $\dot{p}_{n-1,1} = \lambda p_{n-1,n} + p_{n1} - p_{n-1,1} d_1 = c_{n1}$ and $p_{n-1,1} = c_{n1} t + c_{n-1,1}$. Since all the $p_{ij}(t)$ are bounded, $p_{n1} \equiv 0$.

If $d_1 \not\equiv \lambda$, then $p_{n1} = c_{n1} \exp \int_0^t (\lambda - d_1)\, ds$. Then $p_{n-1,1} = c_{n1} t \exp \int_0^t (\lambda - d_1)\, ds + c_{n1} c_{n-1,1} \exp \int_0^t (\lambda - d_1)\, ds$ and $\int_0^t (\lambda - d_1)\, ds \to -\infty$ as $t \to \infty$. But then $p_{n1} \to 0$ as $t \to \infty$. Thus in either case, $\lim_{t\to\infty} p_{n1}(t) = 0$.

Similar reasoning, using d_j, shows that $\lim_{t\to\infty} p_{nj}(t) = 0$ for $j = 1, 2, \ldots, n$. But then $\lim_{t\to\infty} \det \mathcal{P} = 0$. This requires that $\lim_{t\to\infty} |\det \mathcal{P}^{-1}| = \infty$ which is impossible since $\mathcal{P}^{-1} \in \mathfrak{M}_n$. Therefore the supposition that $\dot{\mathcal{P}} = \mathcal{A}_J \mathcal{P} - \mathcal{P} D$ where $\mathcal{P}, \mathcal{P}^{-1} \in \mathfrak{M}_n$ leads to a contradiction.

Now in the general case let $\mathcal{A}_J$ contain several (non-diagonal) elementary divisor blocks. The differential equations for the elements (p_{ij}) lying in the first m rows (say, the first block of $\mathcal{A}_J$ has m rows) are exactly the same as those given above, except the last set reads:

$$\begin{aligned} \dot{p}_{m1} &= \lambda p_{m1} - p_{m1} d_1 \\ &\vdots \\ \dot{p}_{mn} &= \lambda p_{mn} - p_{mn} d_n. \end{aligned}$$

Again we conclude $\lim_{t\to\infty} p_{mj}(t) = 0$ for $j = 1, 2, \ldots, m, \ldots, n$. Again this requires $\lim_{t\to\infty} \det \mathcal{P} = 0$ which is impossible.

Therefore we must have only diagonal blocks in $\mathcal{A}_J$. Q. E. D.

As a special instance of the above theorem we note that if $D \in \mathfrak{M}_n$ is diagonal and $D \sim C$, a constant matrix, then the unique real Jordan form for D is diagonal.

3. *Stability of non-linear differential systems.* Let $\dot{u}^i = f^i(u)$ be a differential system with n real-valued functions $f^i(u)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ of class $C^{(2)}$ in a region O of Euclidean n-space E^n. Let $u^i = \varphi^i(t)$ be a solution, lying in a bounded subregion K, with $\bar{K} \subset O$, for all $0 \leq t < \infty$, and consider the LIAPOUNOFF stability of this solution. Here a nearby $u(t)$, lying in $K \subset O$ for $0 \leq t < t_1 \leq \infty$, differs from the base solution $\varphi(t)$ by $x^i(t) = u^i(t) - \varphi^i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Furthermore $\dot{x}^i = \partial f^i / \partial u^j \left(\varphi(t)\right) x^j + \partial^2 f^i / \partial u^j \partial u^k \left(\varphi(t) + \varepsilon(t)\right) x^j x^k$ where $\varphi(t) + \varepsilon(t)$ is some point on the line segment joining $\varphi(t)$ to $u(t)$. Therefore $\dot{x}^i = J^i_j(t) x^j + B^i_{jk}(t) x^j x^k$ where $J(t)$ and $B(t)$ are continuous and bounded on $0 \leq t < t_2 \leq t_1$. We seek conditions on $J(t)$ which insure that every solution $x(t)$, with sufficiently small initial values $|x(0)|$ will be defined for $0 \leq t < \infty$ and will approach the origin as $t \to \infty$ (or will, at least, remain small). In this case the solution $\varphi(t)$ of the non-linear system is called stable. The obvious conjecture that "if the characteristic exponents of $J(t)$ are negative, then the non-linear system is stable at $\varphi(t)$" is known to be false [*15*, p. 705].

Theorem 4. *Let* $\dot{x}^i = J^i_j(t)\,x^j + F^i(t, x)$ *where* $\mathcal{J}(t) \in \mathfrak{M}_n$ *and* $\mathcal{F}(t, x) \in C^{(1)}$ *for* $0 \leqq t < \infty$ *and* $|x| < \varepsilon$, *for* $\varepsilon > 0$ *and* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Also assume*

$$\lim_{x \to 0} |\mathcal{F}(x, t)|/|x| = 0$$

uniformly on $0 \leqq t < \infty$ *and assume that* $\mathcal{J}(t)$ *is kinematically similar to a constant matrix and has negative characteristic exponents. Then there exists* $\delta > 0$ *such that if* $|x(0)| < \delta$, *the solution* $x(t)$ *is defined for all* $0 \leqq t < \infty$ *with* $|x(t)| < \varepsilon$ *and furthermore* $\lim_{t \to \infty} |x(t)| = 0$.

Proof. Let $\mathcal{Y} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{X}$ (or $y^i = \varrho^i_j x^j$ or $x^i = p^i_j y^j$) be a coordinate change in E^n such that $\mathcal{P}, \mathcal{P}^{-1}, \dot{\mathcal{P}} \in \mathfrak{M}_n$ and $-\mathcal{P}^{-1}[\dot{\mathcal{P}} - \mathcal{J}\mathcal{P}] = C$ a real, constant, Jordan matrix which has negative characteristic roots. The transformed differential equations are $\dot{y}^i = C^i_j y^j + \varrho^i_j(t)\,F^j(t, p^e_m y^m)$. Let $G^i(t, y^e) = \varrho^i_j(t)\,F^j(t, p^e_m y^m)$ which is in $C^{(1)}$ for $0 \leqq t < \infty$ and $|y| < \varepsilon_1 = \varepsilon/A$ where $0 < \alpha < |\mathcal{P}(t)| < A$ for $t \geqq 0$. Also

$$\lim_{|y| \to 0} |G(t, y)|/|y| = \lim_{|x| \to 0} |\varrho^i_j(t)\,F^j(t, x)|/|\varrho^i_j(t)\,x^j| = 0.$$

Then by a standard stability theorem [*1*, p. 358], there exists $\delta_1 > 0$ such that for $|y(0)| < \delta_1$, the solution $y(t)$ is defined for all $0 \leqq t < \infty$ with $|y(t)| < \varepsilon_1$ and $\lim_{t \to \infty} |y(t)| = 0$. However, this means that for $|x(0)| < \delta_1 \alpha = \delta$, $|x(t)| < \varepsilon_1 A = \varepsilon$ for all $0 \leqq t < \infty$ and $\lim_{t \to \infty} |x(t)| = 0$. Q. E. D.

Because of the importance of the concept of stability, it is of interest to give estimates for the characteristic exponents of matrices $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}_n$. We do this, in the next section, for certain special kinds of matrices.

4. *Estimates for characteristic exponents.* If the matrices arising in the solution of a system of n homogeneous, linear, differential equations commute, then the system behaves essentially as if $n = 1$. The next theorem, whose hypotheses are fulfilled, for example, by a diagonal matrix $\mathcal{A} = D \in \mathfrak{M}_n$, illustrates this principle.

Theorem 5. *Let* $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}_n$ *commute with* $\int_0^t \mathcal{A}(s)\,ds$ *for each* $0 \leqq t < \infty$. *Assume* $\mathcal{A} = \mathcal{A}_p + \mathcal{A}_0$ *where* $\mathcal{A}_0$ *is constant and commutes with both* $\mathcal{A}$ *and* $\int_0^t \mathcal{A}(s)\,ds$. *Suppose* $\int_0^t \mathcal{A}_p(s)\,ds \in \mathfrak{M}_n$. *Then* $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}_0$ *and* $\mathcal{A}_0 = \lim_{t \to \infty} t^{-1} \int_0^t \mathcal{A}(s)\,ds$.

Proof. We first establish certain commutation results. Now $\mathcal{A}_p \int_0^t \mathcal{A}_p\,ds = (\mathcal{A} - \mathcal{A}_0)\left(\int_0^t \mathcal{A}\,ds - \int_0^t \mathcal{A}_0\,ds\right) = \left(\int_0^t \mathcal{A}\,ds - \int_0^t \mathcal{A}_0\,ds\right)(\mathcal{A} - \mathcal{A}_0) = \left(\int_0^t \mathcal{A}_p\,ds\right)\mathcal{A}_p$. A similar calculation shows that $\mathcal{A}_0$ and $\int_0^t \mathcal{A}_p\,ds$ commute.

Let $\mathcal{P} = \exp \int_0^t \mathcal{A}_p\,ds$. One easily computes $-\mathcal{P}^{-1}[\dot{\mathcal{P}} - \mathcal{A}\mathcal{P}] = \mathcal{A}_0$. Since $\left|\int_0^t \mathcal{A}_p\,ds\right| \leq M$, for some constant M, $e^{-M} \leqq |\mathcal{P}| \leq e^M$. Thus both $\mathcal{P}$ and $\mathcal{P}^{-1} \in \mathfrak{M}_n$ and clearly $\mathcal{P} \in C^{(1)}$. Therefore $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}_0$ as required.

Also $\mathcal{A}_0$ is the mean value of $\mathcal{A}$ in the following sense:

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t \mathcal{A}\,ds = \lim_{t\to\infty} t^{-1}\left(\int_0^t \mathcal{A}_p\,ds + \mathcal{A}_0 t\right) = \mathcal{A}_0. \qquad \text{Q. E. D.}$$

Corollary. *Let $\mathcal{A}\in\mathfrak{M}_n$ be almost periodic and let $\mathcal{A}$, $\int_0^t \mathcal{A}\,ds$, and $\mathcal{A}_0$ all commute for each $0\leq t<\infty$ where $\mathcal{A}_0=\lim_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t \mathcal{A}(s)\,ds$. If $\int_0^t (\mathcal{A}-\mathcal{A}_0)\,ds\in\mathfrak{M}_n$, then $\mathcal{A}\sim\mathcal{A}_0$. Moreover the transformation matrix $\mathcal{P}$ is almost periodic.*

Proof. Immediate, cf. [*5*, p. 21—25].

Corollary. *Let $\mathcal{A}\in\mathfrak{M}_n$ be almost periodic and commute with $\int_0^t \mathcal{A}\,ds$ for each $0\leq t<\infty$. Assume $\mathcal{A}$ has an absolutely convergent Fourier series whose characteristic frequencies are bounded away from zero. Then $\mathcal{A}\sim\mathcal{A}_0=0$ by an almost periodic matrix $\mathcal{P}$.*

Proof. Now $\int_0^t \mathcal{A}\,ds$ is bounded and thus almost periodic. Since

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t \mathcal{A}\,ds = 0,$$

the result follows from the theorem. Q. E. D.

We next investigate a relation between the characteristic exponents of $\mathcal{A}\in\mathfrak{M}_n$ and the averages of the characteristic roots of $\mathcal{A}(t)$ for each fixed value of t. We restrict our attention to matrices for which each $\mathcal{A}(t)$ is normal ($\mathcal{A}\mathcal{A}^*=\mathcal{A}^*\mathcal{A}$), that is, statically similar, by unitary transformation, to a complex diagonal matrix.

Theorem 6. *Let $\mathcal{A}\in\mathfrak{M}_n$ be normal for each fixed t on $0\leq t<\infty$. Let $M(t)$ be the maximum of the real parts of the characteristic roots of $\mathcal{A}(t)$ and $m(t)$ be the minimum of these real parts. Then*

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t m(s)\,ds \leq \lambda_i \leq \limsup_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t M(s)\,ds,$$

where the λ_i are the characteristic exponents of $\mathcal{A}$.

Proof. By the theory of perturbation of the spectrum, we know that $M(t)$ and $m(t)$ are real, continuous, bounded functions on $0\leq t<\infty$.

Now the radial velocity along any solution $\mathcal{X}(t)$ of $\dot{\mathcal{X}}=\mathcal{A}\mathcal{X}$ is

$$\dot{r} = (\mathcal{X}^*\mathcal{A}^*\mathcal{X}+\mathcal{X}^*\mathcal{A}\mathcal{X})\,r\,(2\,\|\mathcal{X}\|^2)^{-1} \quad \text{where} \quad r^2=\mathcal{X}^*\mathcal{X}=\|\mathcal{X}\|^2.$$

Since $\mathcal{A}(t)$ is normal for each $t\geqq 0$,

$$m(t)\leq(\mathcal{X}^*\mathcal{A}^*\mathcal{X}+\mathcal{X}^*\mathcal{A}\mathcal{X})/2\,\|\mathcal{X}\|^2\leq M(t).$$

Thus along $\mathcal{X}(t)$, $m(t)\leq\dot{r}/r\leq M(t)$. Therefore

$$\int_0^t m(s)\,ds \leq \log r(t) - \log r(0) \leq \int_0^t M(s)\,ds.$$

Now

$$\lambda = \limsup_{t\to\infty} t^{-1}\log|X(t)| = \limsup_{t\to\infty} t^{-1}\log r.$$

Therefore

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t m(s)\,ds \leqq \limsup_{t\to\infty} t^{-1}\log r \leqq \limsup_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t M(s)\,ds,$$

which proves the theorem. Q. E. D.

It may be remarked that if $\limsup_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t M(s)\,ds < 0$, then every solution of $\dot{X} = XA$, under the assumptions of the theorem, approaches the origin as $t\to\infty$.

Corollary. *Let $A\in\mathfrak{M}_n$ be normal for each fixed $t\geqq 0$ and let A be almost periodic or have period $T>0$. Then $M(t)$ and $m(t)$ are also almost periodic, or have period T, respectively, and*

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t m(s) \leqq \lambda_i \leqq \lim_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t M(s)\,ds.$$

Proof. Let A have period $T>0$. Then clearly both $M(t)$ and $m(t)$ have period T.

Suppose A is almost periodic. Then for each $\delta>0$, there are $L(\delta)$-dense approximate periods τ_α such that $|A(t)-A(t+\tau_\alpha)|<\delta$ for $-\infty<t<\infty$. Since $|A(t)|$ is bounded, one can choose δ so small that $|M(t)-M(t+\tau_\alpha)|<\varepsilon$ and $|m(t)-m(t+\tau_\alpha)|<\varepsilon$ for a preassigned $\varepsilon>0$ and all $-\infty<t<\infty$. Thus both $M(t)$ and $m(t)$ are almost periodic.

Therefore the limits designated in the conclusion of the corollary do exist and the result follows from the theorem. Q. E. D.

We conclude with an example to show that if $A(t)$ is not normal, then the conclusions of theorem 6 are not valid.

Example. Consider $\dot{X} = AX$ where

$$A = \begin{pmatrix} 1+\cos^2 t & 1-\sin t\cos t \\ -1-\sin t\cos t & 1+\sin^2 t \end{pmatrix},$$

A solution matrix is

$$X = \begin{pmatrix} e^t\sin t & -e^{2t}\cos t \\ e^t\cos t & e^{2t}\sin t \end{pmatrix}$$

and the characteristic exponents of A are $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$. For each fixed t_0 on $0\leqq t<\infty$, the characteristic roots of $A(t_0)$ have real parts with $m(t_0)=\frac{3}{2}$, $M(t_0)=\frac{3}{2}$. But these do not satisfy the inequalities of theorem 6.

Bibliography.

[1] BELLMAN, R.: On the boundedness of solutions of non-linear differential and difference equations. Trans. Amer. Math. Soc. **62**, 357—386 (1947). — [2] BELLMAN, R.: Stability theory of differential equations. New York 1953. — [3] BOHR, H., and O. NEUGEBAUER: Über lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und fastperiodische rechte Seite. Nachr. Göttingen 8—22 (1926). — [4] CAMERON, R.: Linear

differential equations with almost periodic coefficients. Acta math., Stockh. **69**, 21—56 (1938). — [*5*] DILIBERTO, S.: On systems of ordinary differential equations. Contributions to the theory of non-linear oscillations, p. 1—38. 1950. — [*6*] FAVARD, J.: Lecons sur les fonctions presque-périodique, Ch. 3. Paris 1933. — [*7*] FLOQUET, G.: Sur les équations différentielles linéares à coefficients périodique. Ann. de l'Ecole Normal Supp. **12**, 47—88 (1883). — [*8*] JACOBSON, N.: Pseudo-linear transformations. Ann. of Math. **38**, 484—507 (1937). — [*9*] LEFSCHETZ, S.: Lectures on differential equations. Princeton 1946. — [*10*] LIAPOUNOFF, A.: Problème général de la stabilité du mouvement. Reprinted by Princeton 1949. — [*11*] LOEWY, H.: Über Matrizen und Differentialkomplexe. Math. Ann. **78**, 1—51 (1918). — [*12*] MASSERA, J.: Existence of periodic solutions. Duke Math. J. **17**, 457—475 (1950). — [*13*] PERRON, O.: Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme. Math. Z. **31**, 748—766 (1930). — [*14*] PERRON, O.: Über eine Matrixtransformation. Math. Z. **32**, 465—473 (1930). — [*15*] PERRON, O.: Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. Math. Z. **32**, 703—728 (1930). — [*16*] WAZEWSKI, T.: Sur les matrices dont les éléments sont des fonctions continues. Composito mathematica **2**, 63—68 (1935). — [*17*] WINTNER, A.: A criterion for stable characteristic exponents. Quart. Appl. Math. **5**, 232—237 (1947). — [*18*] WINTNER, A., and C. R. PUTNAM: Linear differential equations with almost periodic or Laplace transform coefficients. Amer. J. Math. **73**, 792—806 (1951).

Dept. of Math., Yale University, New Haven, Conn. (USA.).

(Eingegangen am 31. Januar 1955.)

Djerasimović, B.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 320—329 (1955)

Beitrag zur Theorie der regelmäßigen Kettenbrüche.

Von
Božidar Djerasimović.

I. Einleitung.

1. In dieser Arbeit wollen wir versuchen, eine neue Symbolik in die Theorie der regelmäßigen Kettenbrüche einzuführen. Durch diese neue Symbolik erreicht man zunächst eine kürzere und übersichtlichere Schreib- und Beweisweise, bekommt aber auch oft allgemeinere Formeln. Besonders wird durch diese neue Symbolik eine Möglichkeit gewonnen, gewisse Veränderungen an einzelnen unvollständigen Quotienten oder an ihrer Folge auszudrücken, welche sonst schwer oder überhaupt nicht durch Zähler und Nenner der aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche auszudrücken wären.

Zuerst wird die bereits erwähnte Symbolik dargelegt, danach wollen wir mit ihrer Hilfe die bekannten Formeln aus der Theorie der regelmäßigen Kettenbrüche ausdrücken, um schließlich auch gewisse neue durch diese Symbolik gewonnene Resultate zu gewinnen.

II. Bezeichnungen und Operationen.

2. Nach Frobenius [1] wollen wir einen geordneten Komplex $a_1\, a_2 \dots a_m$ der Größen oder Symbole mit einem großen lateinischen Buchstaben bezeichnen:

$$A = a_1 a_2 \dots a_{m-1} a_m.$$

Ist ferner $B = b_1\, b_2 \dots b_n$, dann ist

$$a_1 a_2 \dots a_m b_1 b_2 \dots b_n = AB.$$

Für diese Symbole gilt nicht das Kommutativ-, aber das Assoziativgesetz

$$\{AB\}\, C = A\, \{BC\}.$$

Demnach ist der Sinn der Potenz $A^k = \underbrace{A\, A \dots A}_{k\,\text{mal}}$ sowie des Ausdrucks $A^k B^l C^m \dots$ eindeutig bestimmt. Ebenso wollen wir, wenn a eine einzige Zahl ist, den Komplex $\underbrace{a\, a \dots a}_{k\,\text{mal}}$ mit $\{a\}^k$ oder mit a^k bezeichnen. Führen wir auch den Begriff des leeren Komplexes ein, den wir mit V bezeichnen werden, so ist $A^0 = V$, $a^0 = V$.

3. Wir definieren drei Operationen, welche an einem geordneten Komplex $A = a_1\, a_2 \dots a_m$ durchgeführt werden können, wobei wir berücksichtigen, daß

in unserem Fall $a_1, a_2, \ldots, a_m$ unvollständige Quotienten eines regelmäßigen Kettenbruchs sind — also natürliche Zahlen. Das sind:

1. Inversion:

$$\underline{A} = a_m a_{m-1} \ldots a_3 a_2 a_1, \qquad (m \geqq 0).$$

So z.B.:

$$\underline{\{ABC\}} = \underline{C}\,\underline{B}\,\underline{A}, \quad \underline{\{ab\}} = ba, \quad \underline{\{a\}} = a.$$

2. Weglassen der ersten oder der letzten Glieder:

$$\begin{array}{l|l} {}'A = a_2 a_3 \ldots a_m & A' = a_1 a_2 \ldots a_{m-1} \\ {}''A = a_3 a_4 \ldots a_m & A'' = a_1 a_2 \ldots a_{m-2} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ {}^{(k)}A = a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_m & A^{(k)} = a_1 a_2 \ldots a_{m-k} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

wo $k \leqq m$ ist. So z.B.:

$$\{a\}' = V, \quad {}^{(m)}A = V, \quad \{AB\}' = AB'.$$

3. Änderung der geraden Gliederzahl in die ungerade und umgekehrt:

$$*A = \begin{cases} 1 + a_2 \\ 1,\ a_1 - 1,\ a_2 \end{cases} a_3 a_4 \ldots a_m \qquad \begin{array}{l} (\text{bei } a_1 = 1) \\ (\text{bei } a_1 \geqq 2), \end{array}$$

$$A* = a_1 a_2 \ldots a_{m-2} \begin{cases} a_{m-1} + 1 \\ a_{m-1},\ a_m - 1,\ 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} (\text{bei } a_m = 1) \\ (\text{bei } a_m \geqq 2), \end{array}$$

wo $m \geqq 2$ oder $m = 1$, $a_1 > 1$ ist. So z.B.:

$$*\{AB\} = *AB; \qquad \{A*\}* = A;$$

$$*\{a\} = 1,\ a - 1, \qquad \{a\}* = a - 1,\ 1, \qquad (a \geqq 2).$$

Wie man sieht, sind die eingeführten Operationen untereinander nicht vertauschbar, daher bestimmen wir die Reihenfolge dieser Operationen durch die folgende Regel.

Sind an einem geordneten Komplex mehr Operationen angedeutet, so soll zuerst die Operation der Inversion ausgeführt werden, dann die übrigen zwei, und zwar — wenn sie auf derselben Seite sind — zuerst diejenige, deren Zeichen (* oder ') *dem den Komplex bezeichnenden Buchstaben näher ist. Sind diese Operationen auf verschiedenen Seiten, beeinflussen sie einander nicht.*

So z.B.:

$$\underline{A}* = \{\underline{A}\}*, \quad {}'\underline{A} = {}'\{\underline{A}\}, \quad \underline{\{'A*\}} = *\underline{A}',$$

$$A*' = \{A*\}', \quad *'A = *\{'A\}.$$

4. Zum Schreiben des regelmäßigen Kettenbruchs wollen wir das bekannte Symbol:

$$(a_1 a_2 a_3 \ldots) = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}$$

benützen. Außerdem wollen wir das ebenfalls bekannte Symbol $[a_1 a_2 \dots a_m]$ für die durch die Gleichung

$$(1) \qquad (a_1 a_2 \dots a_m) = \frac{[a_1 a_2 \dots a_m]}{[a_2 a_3 \dots a_m]}$$

definierte Eulersche Funktion anwenden.

III. Einige Formeln aus der Theorie der regelmäßigen Kettenbrüche.

5. Es seien

$$A = a_1 a_2 \dots a_m, \qquad B = b_1 b_2 \dots b_n, \qquad C = c_1 c_2 \dots c_p$$

geordnete Komplexe von natürlichen Zahlen. Dann folgen aus der Definition der eingeführten Operationen und aus den bekannten Eigenschaften der Symbole $(a_1 a_2 \dots a_m)$ und $[a_1 a_2 \dots a_m]$ die Identitäten:

$$(2) \qquad [\underline{A}] = [A], \qquad (m \geq 0),$$

(PERRON [2], § 11, I);

$$(3) \qquad (A^*) = (A), \quad \text{aber} \quad (^*A) \neq (A),$$

$$(4) \qquad [^*A] = [A], \qquad [A^*] = [A], \qquad (m \geq 2 \quad \text{oder} \quad m = 1, \ a_1 \geq 2),$$

(PERRON [2], § 9, III);

$$(5) \qquad (A) = \frac{[A]}{['A]}, \qquad (\underline{A}) = \frac{[A]}{[A']}, \qquad (m \geq 1).$$

Die bekannten Rekursionsformeln erhalten die Gestalt:

$$(6) \qquad [A] = a_m [A'] + [A''], \qquad (m \geq 1),$$

mit

$$(7) \qquad [V] = 1, \qquad ['V] = [V'] = 0,$$

(PERRON [2], § 9, Formeln (6) und (7));

$$(8) \qquad [AB] = [A]\,[B] + [A']\,['B], \qquad (m \geq 0, \ n \geq 0),$$

(PERRON [2], § 5, (4));

$$(9) \qquad [B]\,[ABC] = [AB]\,[BC] + (-1)^n [A']\,['C], \qquad (m, n, p \geq 0),$$

(PERRON [2], § 6, (7));

$$(10) \qquad [A]\,['A'] - ['A]\,[A'] = (-1)^m, \qquad (m \geq 1),$$

(PERRON [2], § 6, (1));

$$(11) \qquad (AB) - (A) = \frac{(-1)^{m-1}['B]}{['AB]\,['A]}, \qquad (m \geq 1, \ n \geq 0),$$

(PERRON [2], § 6, (4)).

6. Ist $S = \underline{S}$, dann ist der geordnete Komplex

$$S = a_1 a_2 \dots a_2 a_1$$

symmetrisch. Die symmetrischen Komplexe mit gerader bzw. ungerader Gliederzahl können in der folgenden Gestalt geschrieben werden: $\underline{A}A$ und

$\underline{A}\,a\,A$, wo A irgendein geordneter Komplex der natürlichen Zahlen, und a eine natürliche Zahl ist. Durch die unmittelbare Anwendung der Formel (8) bekommt man die bekannten Formeln:

$$[\underline{A}\,A] = [A]^2 + [{}'A]^2,$$

$$[\underline{A}\,a\,A] = [A]\{[a\,A] + [{}'A]\},$$

weil:

$$[\underline{A}] = [A], \quad [\underline{A}'] = [{}'A], \quad [\underline{A}\,a] = [a\,A].$$

(Perron [2], § 11, Formeln (7), (9), (11) und (13).)

7. *Ist $A = a_1 a_2 \ldots a_m$ irgendein geordneter Komplex der natürlichen Zahlen mit endlicher oder unendlicher Gliederzahl ($m \geqq 2$ oder $m = 1$, $a_1 \geqq 2$), dann gilt die Identität:*

$$(0\,A) + (0\,{}^*A) = 1, \tag{12}$$

welche man auch in den folgenden Gestalten schreiben kann:

$$-(0\,A) = (-1, {}^*A), \tag{13}$$

$$[{}'^*A] = [A] - [{}'A], \tag{14}$$

$$[A^{*\prime}] = [A] - [A']. \tag{15}$$

Beweis. Beginnt der Komplex A mit dem Glied $a_1 = 1$ oder $a_1 > 1$, so hat die linke Seite der Gl. (12) folgende Gestalt:

$$(0, 1, a - 1, B) + (0, a, B), \tag{16}$$

wo $a \geqq 2$ eine natürliche Zahl, B dagegen ein geordneter Komplex der natürlichen Zahlen ist. Der Ausdruck (16) hat immer den Wert 1, weil

$$(0, 1, a-1, B) = \frac{1}{1 + \frac{1}{(a-1, B)}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{(a\,B) - 1}} = 1 - (0, a, B)$$

ist. Dadurch sind die Identitäten (12) und (13) bewiesen. Aus der Identität (12) folgt:

$$\frac{[{}'A]}{[A]} + \frac{[{}'^*A]}{[A]} = 1,$$

das ist aber die Identität (14).

Schließlich wenn wir A durch $\underline{A}$ ersetzen, so folgt die Identität (15).

IV. Drei Sätze über die zueinander konjugierten quadratischen Irrationalzahlen.

8. Die regelmäßigen periodischen Kettenbrüche, welche zwei zueinander konjugierte quadratische Irrationalzahlen darstellen, sind voneinander abhängig (Perron [2], Sätze 3.6 und 3.8). Der folgende Satz ermöglicht die unmittelbare Bestimmung des Kettenbruches einer quadratischen Irrationalzahl aus dem Kettenbruch der zu ihr konjugierten und umgekehrt.

Satz 1. *Ist die quadratische Irrationalzahl $\xi > 1$ durch ihre Kettenbruchentwicklung gegeben*

(17) $$\xi = (B\bar{A}),$$

wo A und B geordnete Komplexe der natürlichen Zahlen sind

$$\left.\begin{aligned} A &= a_1 a_2 \dots a_m \\ B &= b_1 b_2 \dots b_n \end{aligned}\right\} \quad \text{mit} \quad b_n \neq a_m,\ m \geq 1,\ n \geq 0,$$

so kann immer, ohne auf die endliche Gestalt der Zahl ξ überzugehen, die zu ξ konjugierte Zahl η bestimmt werden, ebenfalls in der Gestalt des regelmäßigen periodischen Kettenbruchs, und zwar:

Ist ξ von der Gestalt:	*wobei:*	*dann und nur dann ist η von der Gestalt:*	
$(\bar{A})$	—	$(-1, {}^*\underline{A}\bar{A})$	(18)
$(b_1\bar{A})$	$b_1 \neq a_m$ *oder* $b_1 = a_m$	$(b_1 - a_m - 1, {}^*{}'\underline{A}\bar{A})$	(19)
$(B\bar{A})$	$b_n > a_m + 1$	$(B', b_n - a_m - 1, {}^*{}'\underline{A}\bar{A})$	(20)
$(B\bar{A})$	$b_n = a_m + 1$	$(B'', \{b_{n-1} + ({}^*{}'\underline{A}\bar{A})\})$	(21)
$(B\bar{A})$	$b_n < a_m,\ b_{n-1} > 1$	$(B'', b_{n-1} - 1, {}^*\{a_m - b_n, {}'\underline{A}\}\bar{A})$	(22)
$(B\bar{A})$	$b_n < a_m,\ b_{n-1} = 1$	$(B''', \{b_{n-2} + ({}^*\{a_m - b_n, {}'\underline{A}\}\bar{A})\})$	(23)
$(1, b_2, \bar{A})$	$b_2 < a_m$	$(0, {}^*\{a_m - b_2, {}'\underline{A}\}\bar{A})$	(24)

Beweis. Nach dem bekannten Satz von Galois (PERRON [2], Satz 3.6) und nach der Formel (13), folgt aus $\xi = (\bar{A})$:

$$\eta = -(0\underline{\bar{A}}) = (-1, {}^*\underline{A}\bar{A}),$$

das ist aber die Formel (18). Aus

$$\xi = (b_1\bar{A}) = b_1 + \frac{1}{(\bar{A})},$$

folgt

$$\eta = b_1 + \frac{1}{-(0\underline{A})}, \quad \text{d.h.} \quad \eta = b_1 - (\underline{\bar{A}})$$

und aus der Formel (13) ergibt sich:

$$\eta = b_1 - (\underline{\bar{A}}) = b_1 - a_m - (0\,{}'\underline{A}\bar{A}) = b_1 - a_m + (-1, {}^*{}'\underline{A}\bar{A}),$$

so gelangt man zur Formel (19).

Schreiben wir im allgemeinen Fall den Bruch $\xi = (B\bar{A})$ in der Gestalt:

(25) $$\xi = (B'', \vartheta),$$

wo ϑ eine quadratische Irrationalzahl ist

$$\vartheta = (b_{n-1} b_n \bar{A}) = b_{n-1} + \frac{1}{(b_n \bar{A})}. \tag{26}$$

Nach den Formeln (19), (26) und (25) sind die zu ϑ und ξ konjugierte Zahlen

$$\vartheta' = b_{n-1} + \frac{1}{(b_n - a_m - 1, *'\underline{A}\,\bar{\underline{A}})}, \tag{27}$$

$$\eta = (B'', \vartheta'). \tag{28}$$

Unterscheiden wir nun drei Fälle:

1. Ist $b_n > a_m + 1$, dann ist der Nenner des Bruchs in der Gl. (27) größer als 1, und daher

$$\vartheta' = (b_{n-1}, b_n - a_m - 1, *'\underline{A}\,\bar{\underline{A}}).$$

Da aber $\vartheta' > 1$ ist, so bekommt man durch seine Eintragung in die Gl. (28) die Formel (20).

2. Ist $b_n = a_m + 1$, dann wird ϑ' zu

$$\vartheta' = b_{n-1} + (*'\underline{A}\,\bar{\underline{A}}),$$

da aber $\vartheta' > 1$ ist, folgt aus der Gl. (28) die Formel (21).

3. Sei schließlich $b_n < a_m$, dann können wir ϑ' — nach dem schon erwähnten Satz von Galois und nach der Formel (26) — in der Gestalt

$$\vartheta' = b_{n-1} + \frac{1}{b_n - (\bar{\underline{A}})},$$

schreiben, d. h.

$$\vartheta' = b_{n-1} - (0, a_m - b_n, '\underline{A}\,\bar{\underline{A}})$$

und endlich auf Grund der Formel (13) in der Gestalt:

$$\vartheta' = (b_{n-1} - 1, *\{a_m - b_n, '\underline{A}\}\,\bar{\underline{A}}). \tag{29}$$

Wenn $b_{n-1} > 1$, dann ist $\vartheta' > 1$, und so bekommt man durch seine Eintragung in die Gl. (28) die Formel (22). Ist $b_{n-1} = 1$, dann wird die Gl. (29):

$$\vartheta' = (0, *\{a_m - b_n, '\underline{A}\}\,\bar{\underline{A}}),$$

und da aus der Gl. (28)

$$\eta = \left(B''', b_{n-2} + \frac{1}{\vartheta'}\right)$$

folgt, so ergibt sich daraus die Formel (23). Die Formel (24) folgt unmittelbar aus der Gl. (29).

Umgekehrt, wird ξ als die zu η konjugierte Zahl gesucht, dann erhält man ξ aus jeder der Formeln (18) bis (24) in der Gestalt $\xi = (B\bar{A})$, deren unvollständige Quotienten der entsprechenden Bedingung genügen. Zum Beispiel, aus (22):

$$\eta = (B'', \alpha, *\{\beta, '\underline{A}\}\,\bar{\underline{A}}), \qquad (\alpha \text{ und } \beta \text{ natürliche Zahlen, } \beta < a_m),$$

wenn man wie im vorigen Beweis verfährt, folgt

$$\xi = (B'', \alpha + 1, a_m - \beta, \bar{A})$$

was bedeutet, daß: $b_{n-1} = \alpha + 1$, also $b_{n-1} > 1$, und $b_n = a_m - \beta$, also $b_n < a_m$. Außerdem durch die sieben im Satz 1 angegebenen Fälle ist die Gesamtheit aller periodischen regelmäßigen Kettenbrüche $\xi > 1$ umfaßt. So ist der Satz 1 im ganzen bewiesen.

9. Beispiel: Sei

$$\xi = (3, 2, 1, 6, \overline{1, 3, 7})$$

so ist nach der Formel (23):

$$\eta = \left(3, \left\{2 + (*\{1, 3, 1\}, \overline{7, 3, 1})\right\}\right),$$

danach

$$\eta = \left(3, \left\{2 + (4, \overline{1, 7, 3})\right\}\right) = \left(3, (6, \overline{1, 7, 3})\right)$$

und schließlich

$$\eta = (3, 6, \overline{1, 7, 3}).$$

Umgekehrt würden wir ξ aus η auf Grund der Formel (20) bekommen:

$$\xi = (3, 2, *\{7, 1\}, \overline{3, 7, 1}),$$

d.h.

$$\xi = (3, 2, 1, 6, \overline{1, 3, 7}).$$

10. Aus Satz 1 erhält man folgenden

Satz 2. *Ist $\xi > 1$ der gegebene regelmäßige periodische Kettenbruch:*

$$\xi = (b_1 b_2 \dots b_n \overline{a_1 a_2 \dots a_m}), \qquad (b_n \neq a_m),$$

und η die zu ihm konjugierte Zahl, dann ist

1. bei $n = 0$ und $n = 1$ immer $\xi > \eta$;

2. bei $n \geq 2$, hat die Differenz $\xi - \eta$ das Vorzeichen des Ausdrucks

$$(-1)^n (a_m - b_n).$$

Beweis. 1. folgt unmittelbar aus (18) und (19). 2. Aus (20) und (21) ergibt sich, daß bei $b_n > a_m$ die Differenz $\xi - \eta$ das Vorzeichen $(-1)^{n+1}$ hat, und aus (22), (23) und (24) folgt, daß bei $b_n < a_m$ die Differenz $\xi - \eta$ das Vorzeichen $(-1)^n$ hat — immer bei $n \geq 2$. Zusammenfassend ergeben beide Schlußfolgerungen die Behauptung 2. des Satzes 2.

11. Aus Satz 1 ergibt sich leicht noch folgender

Satz 3. *Sind ξ und η ($\xi > \eta$, $\xi > 1$) zwei zueinander konjugierte quadratische Irrationalzahlen und wird ξ in einen regelmäßigen Kettenbruch entwickelt, dann gilt über die Gliederzahl seiner Vorperiode folgendes:*

1. Befinden sich zwischen ξ und η zwei oder mehr ganze Zahlen, dann und nur dann besitzt ξ eingliedrige Vorperiode (für $\eta > 0$ und $\eta < -1$) oder ist reinperiodisch (für $-1 < \eta < 0$).

2. Befindet sich zwischen ξ und η nur eine ganze Zahl, dann und nur dann ist die Vorperiode der Zahl ξ zweigliedrig.

3. Befindet sich zwischen ξ und η keine ganze Zahl, dann und nur dann hat die Vorperiode der Zahl ξ drei oder mehr Glieder.

Beweis. 1. Ist die quadratische Irrationalzahl ξ von der Gestalt $\xi = (b_1 \bar{A})$, wo $b_1 \neq a_m$ oder $b_1 = a_m$ ist, dann ist nach Satz 1 [Formel (19)]:

$$\eta < b_1 - 1. \tag{30}$$

Umgekehrt, aus (30) folgt

$$-1 < \frac{1}{\eta - b_1} < 0,$$

was bedeutet, daß $\frac{1}{\xi - b_1}$ eine reduzierte Zahl ist:

$$\frac{1}{\xi - b_1} = (\bar{A}), \quad \text{oder also} \quad \xi = (b_1 \bar{A}).$$

2. Ist $\xi = (b_1 b_2 \bar{A})$, mit $b_2 \neq a_m$, größer als die zu ξ konjugierte Zahl η, dann ist nach Satz 2

$$(-1)^2 (a_m - b_2) > 0, \quad \text{oder also} \quad b_2 < a_m.$$

In diesem Fall ist nach (22) und (24) η von der Gestalt

$$\eta = (b_1 - 1, {}^*\{a_m - b_2, {}'\underline{A}\}\underline{\bar{A}}),$$

was bedeutet, daß die Ungleichheit

$$b_1 - 1 < \eta < b_1 \tag{31}$$

befriedigt ist. Umgekehrt folgt aus (31)

$$\frac{1}{\eta - b_1} < -1,$$

was bedeutet — nach Satz 3, Beh. 1 —, daß die Vorperiode der Zahl $\frac{1}{\xi - b_1}$ eingliedrig ist, d.h.

$$\frac{1}{\xi - b_1} = (b_2 \bar{A}), \quad \text{mit} \quad b_2 \neq a_m,$$

oder

$$\xi = (b_1 b_2 \bar{A}).$$

3. Der Beweis folgt aus Beh. 1 und 2 desselben Satzes.

V. Kulminierende und fastkulminierende Perioden.

12. Sei $K, b_0, \underline{K}, 2b_0$ eine kulminierende und $F, b_0 - 1, \underline{F}, 2b_0$ eine fastkulminierende Periode, wo

$$K = a_1 a_2 \dots a_{r-1}, \; F = b_1 b_2 \dots b_{r-1}, \qquad (r \geqq 1),$$

geordnete Komplexe der natürlichen Zahlen sind (PERRON [2], § 29). Dann befriedigt der Komplex K die Gleichung

$$2[K'] = ['K] \tag{32}$$

und der Komplex F die Gleichung

$$[F] = 2[F'] - ['F]. \tag{33}$$

Eine Lösung K der Gl. (32) werden wir einen k-Komplex nennen und eine Lösung F der Gl. (33) einen f-Komplex.

Der Zweck dieser Zeilen unserer Arbeit ist die Bestimmung der Gestalt der k- und f-Komplexe. Dieses Problem wurde in einer allgemeineren Form durch STEUERWALD [3] gelöst, und unsere Lösung wird wegen ihrer Kürze angegeben.

13. Durch folgende zwei Sätze kann man alle k- und f-Komplexe bestimmen.

Satz 4. *a) Der einzige k-Komplex mit weniger als zwei Gliedern ist leer:* $K = V$.

b) Jeder k-Komplex mit zwei und mehr Gliedern, dessen letztes Glied eine gerade Zahl ist, hat die Gestalt

$$K = a_1, \underline{K_0}, 2a_1, \tag{34}$$

wo K_0 *ebenfalls ein k-Komplex und* a_1 *eine natürliche, von* K_0 *unabhängige Zahl ist.*

c) Jeder k-Komplex mit zwei und mehr Gliedern, dessen letztes Glied eine ungerade Zahl ist, hat die Gestalt

$$K = a_1, \underline{F}, 2a_1 + 1, \tag{35}$$

wo F ein f-Komplex und a_1 *eine natürliche, von F unabhängige Zahl ist.*

Beweis. a) Für $K = V$ ist die Gl. (32) befriedigt und für $K = a$ (wo a eine natürliche Zahl ist) kann sie überhaupt *nie* befriedigt werden.

b) und c): Nach Rekursionsformel (8), für $r \geq 3$ kann man die Gl. (32) in der Gestalt

$$2a_1['K'] + 2['']K'] = a_{r-1}['K'] + ['K''] \tag{36}$$

schreiben, und nach der beiderseitigen Division durch $['K']$:

$$a_{r-1} - 2a_1 = 2(0, 'K') - (0, '\underline{K}').$$

Daraus folgt

$$-1 < a_{r-1} - 2a_1 < 2,$$

was bedeutet, daß a_{r-1} nur zwei Werte haben kann:

$$a_{r-1} = 2a_1 \quad \text{oder} \quad a_{r-1} = 2a_1 + 1.$$

Im ersten Fall ergibt sich aus (36)

$$2[''K'] = ['K''],$$

woraus folgt, daß in diesem Fall der Komplex $'\underline{K}'$ immer ein k-Komplex ist. Im zweiten Fall ergibt sich aus (36)

$$['K'] = 2[''K'] - ['K''],$$

woraus nach (33) folgt, daß in diesem Fall der Komplex $'\underline{K}'$ immer ein f-Komplex ist.

Satz 5. *a) Der einzige f-Komplex mit weniger als zwei Gliedern ist: $F = 1$.*

b) Jeder f-Komplex mit zwei und mehr Gliedern hat die Gestalt

$$F = *K*, \tag{37}$$

wo K ein k-Komplex ist.

Beweis. Für $r \geqq 3$ kann man die Gl. (33) in der Gestalt

$$2\{[F] - [F']\} = [F] - ['F]$$

schreiben, und nach den Formeln (14) und (15)

$$2[F*'] = ['*F],$$

oder nach (4) schließlich

$$2[*F*'] = ['*F*].$$

Daraus folgt, nach (32), daß der Komplex $*F*$ immer ein k-Komplex ist:

$$*F* = K, \quad \text{d.h.} \quad F = *K*.$$

Die Analyse der erhaltenen Resultate wurde hier nicht durchgeführt, denn dadurch hätte man genau die gleichen Schlüsse wie in der Arbeit von STEUERWALD bekommen; aber die Tabelle am Schluß des § 6 der erwähnten Arbeit kann auch ohne diese durch einfache Anwendung der Formeln (34), (35) und (37) erhalten werden, wenn man von $K = V$ und $F = 1$ ausgeht.

Literatur.

[1] FROBENIUS, G.: Über die Markoffschen Zahlen. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss. **1913**, 458—487. — [2] PERRON, O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen. Stuttgart: B. G. Teubner 1954. — [3] STEUERWALD, R.: Über die Perioden regelmäßiger Kettenbrüche für Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen. Math. Z. **52**, 686—697 (1950).

Mathematisches Institut der Universität Belgrad (Jugoslawien).

(Eingegangen am 7. Februar 1955.)

VIDAV, I.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 330 (1955)

Über eine Vermutung von Kaplansky.

Von
IVAN VIDAV.

Seien a und b zwei Elemente einer assoziativen Banachschen Algebra und $c = ab - ba$ ihr Kommutator. I. KAPLANSKY hat die Vermutung ausgesprochen[1]), daß c, wenn mit a oder b vertauschbar, ein quasinilpotentes Element ist. Vor kurzem hat C. R. PUTNAM in der Algebra der Operatoren des Hilbertschen Raumes diese Vermutung für den Fall bewiesen, daß c mit a und b vertauschbar ist[2]). Hier will ich zeigen, daß dies auch in der allgemeinsten Banachschen Algebra gültig ist.

Wird in der Banachschen Algebra $\mathfrak{B}$ ohne Einheitselement

$$a e^x = a + \frac{ax}{1!} + \frac{ax^2}{2!} + \cdots, \qquad e^x a = a + \frac{xa}{1!} + \frac{x^2 a}{2!} + \cdots; \qquad a, x \in \mathfrak{B}$$

gesetzt, so gilt, wenn x und y vertauschbar sind:

$$(a e^x) e^y = a e^{x+y}, \qquad (a e^x)(e^y b) = [a e^{x+y}] b = a [e^{x+y} b].$$

Sei nun der Kommutator c mit a vertauschbar. Dann ist bekanntlich $n a^{n-1} c = a^n b - b a^n$. Daraus folgt leicht $\lambda e^{\lambda a} c = e^{\lambda a} b - b e^{\lambda a}$, wo λ eine beliebige Zahl ist. Es ist also für $\lambda \neq 0$

$$c = \lambda^{-1}(e^{\lambda a} b e^{-\lambda a} - b).$$

Hieraus ergibt sich, wenn c auch mit b vertauschbar ist:

$$c^n = \lambda^{-n}\left(e^{\lambda a} b^n e^{-\lambda a} - \binom{n}{1} e^{\lambda a} b^{n-1} e^{-\lambda a} \cdot b + \cdots \pm \binom{n}{n} b^n\right).$$

Für positive λ gilt also die Abschätzung

$$\|c^n\| \leq \lambda^{-n} e^{2\lambda\|a\|} (2\|b\|)^n.$$

Daraus folgt für $\lambda = n$:

$$\|c^n\|^{\frac{1}{n}} \leq n^{-1} e^{2\|a\|} \cdot 2\|b\|, \qquad \lim_{n\to\infty} \|c^n\|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Ist in einer Banachschen Algebra der Kommutator $c = ab - ba$ mit a und b vertauschbar, so ist c quasinilpotent.

[1]) HALMOS, P. R.: Commutators of operators. II. Amer. J. Math. **76**, 191—198 (1954).
[2]) PUTNAM, C. R.: On the spectra of commutators. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 929—931 (1954).

Ljubljana (Jugoslavien), Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 14. März 1955.)

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen
mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete

Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden.

LX. Band:

Numerische Behandlung von Differentialgleichungen

Von Dr. **Lothar Collatz**, o. Professor an der Universität in Hamburg. **Zweite**, neubearbeitete Auflage. Mit 118 Abbildungen und 1 Porträt. XV, 526 Seiten Gr.-8°. 1955. DM 56,—; Ganzleinen DM 59,60

Die neue Auflage unterscheidet sich von der alten Auflage durch Einarbeitung der dem Verfasser seit Erscheinen der 1. Auflage bekannt gewordenen Fortschritte. Es ergaben sich an vielen Stellen neue Ergebnisse, insbesondere wurden für viele Verfahren neue Fehlerabschätzungen aufgestellt. Bei einer größeren Anzahl von Beispielen, bei welcher in der 1. Auflage noch kein Ansatz zu einer Fehlerabschätzung bestand, konnten in der Neuauflage Abschätzungen gebracht werden; bei den partiellen Differentialgleichungen zeigten sich besondere Fortschritte. Ein neu hinzugekommener Paragraph behandelt die Anwendung des Randmaximumsatzes auf Fehlerabschätzungen bei der 1. und 3. Randwertaufgabe elliptischer Differentialgleichungen. Ebenfalls konnten entsprechende Abschätzungen bei parabolischen Differentialgleichungen berücksichtigt werden. Um bei den genannten und verschiedenen anderen Umänderungen den Umfang des Buches nicht zu sehr anschwellen zu lassen, wurde der Text des Buches an vielen Stellen wesentlich knapper gehalten und außerdem in einem neu hinzugekommenen Kapitel I verschiedene Hilfsmittel und allgemeine Prinzipien im Zusammenhang dargestellt, auf die in den weiteren Kapiteln dann nur verwiesen zu werden brauchte.

LXXVI. Band:

Vorlesungen über Orthogonalreihen

Von Dr. **Francesco G. Tricomi**, Professor der Mathematik an der Universität Turin. Übersetzt und zum Druck bearbeitet von Dr. Friedrich Kasch, Göttingen. Mit 13 Abbildungen. VIII, 264 Seiten Gr.-8°. 1955. DM 34,—; Ganzleinen DM 37,60

Das Buch ist, ebenso wie andere Bücher des Verfassers, aus Vorlesungen entstanden, die er zu wiederholten Malen an der Universität Turin gehalten hat. Sein Hauptziel besteht darin, den Leser möglichst rasch in die Theorie der trigonometrischen Reihen und der orthogonalen Polynome einzuführen.
Nach einer kurzen Behandlung der allgemeinen Theorie der orthogonalen Funktionensysteme werden zunächst die Grundlagen der Theorie der trigonometrischen Reihen entwickelt, dann folgt ein Kapitel mit tiefergehenden Eigenschaften dieser Reihen (z. B. absolute Konvergenz) und einigen einführenden Angaben über das Fouriersche Integral. Im vierten Kapitel werden die allgemeinen Eigenschaften der orthogonalen Polynome dargestellt, und die beiden letzten Kapitel sind den Orthogonalpolynomen in einem endlichen bzw. unendlichen Grundintervall gewidmet.
Während in dem Teil über trigonometrische Reihen das Hauptinteresse auf der Konvergenzfrage liegt, werden in dem Teil über Orthogonalpolynome mehr die individuellen Eigenschaften derselben in den Vordergrund gestellt und auch 2 Paragraphen über die allgemeinen Kugelfunktionen hinzugefügt.
Der Leser sei noch aufmerksam gemacht auf die einheitliche Behandlung der sog. „klassischen" Orthogonalpolynome, die auf einer verallgemeinerten „Rodriguez-Formula" beruht, ferner auf einige Ausführungen über neue Untersuchungen asymptotischer Eigenschaften der Orthogonalpolynome und ihrer Nullstellen.
Das vorliegende Buch ist im großen und ganzen eine Übersetzung der 1948 erschienenen „Serie ortogonali di funzioni" des Verfassers, jedoch mit vielen Verbesserungen und Zusätzen, die ihm ein neues Gesicht geben.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete

Unter Mitwirkung der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik" herausgegeben von **L. V. Ahlfors, R. Baer, R. Courant, J. L. Doob, S. Eilenberg, T. Nakayama, H. Rademacher, F. K. Schmidt, B. Segre, E. Sperner.** Neue Folge.

Erstes Heft:

Transfinite Zahlen

Von Dr. **Heinz Bachmann,** Zürich. VII, 204 Seiten Gr.-8°. 1955. DM 29,80

Inhaltsübersicht: I. Einleitung: Allgemeine mengentheoretische Vorbemerkungen. — II. Ordnungszahlen und transfinite Funktionen. — III. Arithmetik der Ordnungszahlen. — IV. Arithmetik der Mächtigkeiten und Kardinalzahlen ohne Auswahlaxiom. — V. Die Konsequenzen des Auswahlaxioms und der Alephhypothese in der Kardinalzahlenarithmetik. — VI. Probleme des Kontinuums und der zweiten Zahlklasse. — VII. Unerreichbare Zahlen. — Literaturverzeichnis. — Sachverzeichnis.

Zweites Heft:

Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico

Von Professor **Carlo Miranda,** Neapel. VIII, 222 Seiten Gr.-8°. 1955. DM 28,80

Indice: **Prefazione.** — I. Problemi al contorno per le equazioni lineari. — II. Funzioni rappresentate da integrali. — III. Traduzione in equazioni integrali dei problemi al contorno. — IV. Soluzioni generalizzate dei problemi al contorno. — V. Maggiorazione a priori delle soluzioni del problema di Dirichlet. — VI. Equazioni non lineari. — VII. Altre ricerche sulle equazioni ellittiche. Equazioni di ordine superiore. Sistemi di equazioni. — Bibliografia. — Indice per autori.

Drittes Heft:

Analytische Fortsetzung

Von Professor Dr. **Ludwig Bieberbach,** Berlin. Mit 2 Textabbildungen. IV, 168 Seiten Gr.-8°. 1955. DM 24,80

Inhaltsübersicht: **Grundlegende Sätze.** Die Laplace-Borelsche Transformation. Die Koeffizienten als ganze Funktionen ihrer Nummer. Die Funktionen $\sum_0^\infty A(n)\,z^n$, $A(z)$ ganz. Der Hadamardsche Multiplikationssatz. Sätze von Hurwitz und Cramér. Die Eulersche Reihentransformation. Ein Test für singuläre Stellen eines Funktionselementes. Unmittelbare Folgerungen aus dem Test. — **Fabrysche Sätze.** Der allgemeine Satz. Der Fabrysche Lückensatz. Der Fabrysche Quotientensatz. — **Weiteres über Lücken und Koeffizientendichten.** Der Lückensatz von Ostrowski. Der Lückensatz von Pólya. Weiteres über Koeffizientendichte. Komplementäre Reihen. — **Die Häufigkeit der fortsetzbaren und der nicht fortsetzbaren Reihen.** Borel, Steinhaus, Boerner. Pólya, Hausdorff. Banach Räume. — **Zusätze zum Hadamardschen Multiplikationssatz.** Ältere Untersuchungen. Die neuere Entwicklung. — **Arithmetische Eigenschaften der Koeffizienten.** Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten. Potenzreihen mit ganzen rationalen Koeffizienten. Ganze ganzwertige Funktionen. — **Die Koeffizienten als Funktionen der Nummer.** Hadamard. Ein allgemeiner Satz von Leau. Der spezielle Satz von Leau. — Literaturverzeichnis. — Namenverzeichnis. — Sachverzeichnis.

Die Bezieher des „Zentralblatt für Mathematik" erhalten die „Ergebnisse der Mathematik" zu einem gegenüber dem Ladenpreis um 10% ermäßigten Vorzugspreis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegen zwei Prospekte des Springer-Verlages, Berlin · Göttingen · Heidelberg, bei.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.